Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 24.8.2001

1. Glede na realno število a poišči rešitve sistema linearnih enačb:

$$\begin{aligned} 2x - ay - z - u &= 0\,, \\ x - z - u &= 0\,, \\ \left(a^2 - a\right) z + (1-a)\, u &= a - 1\,, \\ -2x + ay + z + (a+1)\, u &= a^2 - a\,. \end{aligned}$$

2. Naj bosta U in V naslednji podmnožici vektorskega prostora realnih $n \times n$ matrik:

$$\begin{aligned} U &= \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A + A^T \text{ je diagonalna matrika}\right\}\,, \\ V &= \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A - A^T \text{ je diagonalna matrika}\right\}\,. \end{aligned}$$

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) V primeru $n = 3$ poišči baze vektorskih prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Poišči Jordanovo kanonično obliko matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Določi tudi karakteristični in minimalni polinom matrike A.

4. Na prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ realnih polinomov stopnje največ dva za $i = 1, 2, 3$ definiramo linearne funkcionale

$$F_i(p) = \int_0^i p(x)\, dx\,.$$

   (a) Dokaži, da je $\{F_1, F_2, F_3\}$ baza vektorskega prostora $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

   (b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu F_1 glede na skalarni produkt

$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx.$$

Naloge so enakovredne.