Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

# IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 27. 8. 2002

1. Premica $p$ je vzporedna z ravninama $\pi : x-3y-3z=6$ in $\Sigma : x+3z=1$ ter gre skozi težišče trikotnika $\Delta ABC$, kjer so $A\,(2,1,-1)$, $B\,(1,-3,1)$ in $C\,(0,2,-3)$. Zapiši enačbo premice $p$ in poišči koordinate pravokotne projekcije točke $B$ na ravnino $\Pi$, ki jo določata premica $p$ in točka $A$.

2. Naj bo $V$ vektorski prostor in $\mathcal{A} : V \to V$ endomorfizem, za katerega velja $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = 0$. Dokaži, da je potem $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^n = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Obravnavaj najprej primer $n=2$.

3. Naj bo
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   (a) Izračunaj karakteristični polinom, določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike $A$.
   (b) Zapiši Jordanovo kanonično obliko matrike $A$ in določi minimalni polinom matrike $A$.

4. Na prostoru $\mathbb{R}_5\,[X]$ realnih polinomov stopnje največ 5 sta podana linearna funkcionala
$$F\,(p) = \int_{-1}^{1} xp\,(x)\,dx \quad \text{in} \quad G\,(p) = \int_{-1}^{1} x^2 p\,(x)\,dx.$$
   (a) Določi razsežnost in zapiši primer baze vektorskega podprostora $\operatorname{Ker} F \cap \operatorname{Ker} G$.
   (b) Dopolni zgornjo bazo do baze celega prostora $\mathbb{R}_5\,[X]$.

Naloge so enakovredne.