Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2003

1. (a) Točke $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ in $C(x_3, y_3, z_3)$ določajo v $\mathbb{R}^3$ neizrojen trikotnik ΔABC. Zapiši enačbo nosilke višine na stranico c.
   (b) Dokaži, da se spojnice razpolovišč po dveh mimobežnih robov tristrane piramide sekajo v eni točki, ki te spojnice razpolavlja.

2. Ali obstaja linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja
$$\mathcal{A}(0,1,3,0) = (4,0,2)\,,\ \mathcal{A}(2,-1,3,1) = (1,-1,0)\,,\ \mathcal{A}(1,0,1,0) = (3,1,2)$$
in ki
   (a) je injektivna?
   (b) je surjektivna?
   (c) ima dvorazsežno jedro?

   V primeru pritrdilnega odgovora linearno preslikavo tudi določi!

3. Dana je matrika $A \in M_6(\mathbb{R})$
$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & b & b & b & b & a \end{bmatrix}, \quad b > 0\,.$$
Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Določi tudi njeno jordansko matriko J in matriko prehoda P.

4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(-1) + p(1)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Določi jedro funkcionala F, njegovo dimenzijo ter funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

Naloge so enakovredne.