Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2004

1. V ostrokotnem trikotniku ABC se višini CD in BE sekata v točki V. Točke M, N, O in P so zaporedoma razpolovišča daljic BV, CV, AC in AB. Označimo vektorja $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$.
   (a) Izrazi vektor $\overrightarrow{AV}$ samo z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$. Uporabi pravokotne projekcije!
   (b) Dokaži, da je lik $MNOP$ pravokotnik.

2. V algebri $M_n(\mathbb{R})$ je dana matrična enačba $(X - I)A = I + X$, kjer je A fiksna matrika in I identična matrika.
   (a) Ali je zgornja enačba rešljiva, če je $\det(I - A) = 2004$? Če je, koliko rešitev ima?
   (b) Reši dano matrično enačbo za primer $n = 3$ in
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. S predpisoma $\mathcal{F}p = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx$ in $\mathcal{G}p = p'(-1)$ sta definirana linearna funkcionala na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Funkcionala $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze prostora $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Za primer $n = 3$ določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $\ker\mathcal{F}$, $\ker\mathcal{G}$, $\ker\mathcal{F} \cap \ker\mathcal{G}$ in $\ker\mathcal{F} + \ker\mathcal{G}$.

4. Sebi adjungiran linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima lastne vrednosti $1, -1$ in 0. Njegovo jedro je premica $x = y = -z$ in velja $\mathcal{A}(-1, 1, 0) = (1, -1, 0)$. Določi pripadajoče lastne vektorje operatorja $\mathcal{A}$ in za vsak $n \in \mathbb{N}$ poišči predpis za operator $\mathcal{A}^n$. V $\mathbb{R}^3$ vzamemo običajni skalarni produkt.

Naloge so enakovredne.