Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2005

1. Ravnina π poteka skozi koordinatno izhodišče in vsebuje točki $A\,(2,2,4)$ in $B\,(4,0,2)$. Označimo s Σ množico točk, ki so enako oddaljene od točk A in B.
   (a) Kaj geometrijsko predstavlja množica $\pi \cap \Sigma$? Zapiši njeno enačbo!
   (b) Določi točko C, ki je zrcalna slika točke A glede na množico $\pi \cap \Sigma$ v smeri vektorja $\vec{q} = (2,0,1)$.

   Nalogo opremi s pregledno skico!

2. Naj bo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, ...) | a_n \in \mathbb{R}\}$ vektorski prostor vseh realnih zaporedij. Označimo z $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ podmnožico vseh tistih zaporedij (a_n), ki zadoščajo relaciji $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   (b) Določi razsežnost podprostora V in poišči primer njegove baze.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom $\mathcal{A}\,(X) = BX - XC$, kjer je
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Zapiši matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $M_2(\mathbb{R})$ in določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$.
   (b) Poišči Jordanovo kanonično formo matrike A.

4. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sebi adjungirana preslikava, ki ima eno lastno vrednost 2. Za vsak vektor v, ki leži v ravnini $x - 2y - z = 0$, velja $\mathcal{A}v = -v$. Poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Naloge so enakovredne.