Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 25. 8. 2006

1. Za geometrijska vektorja $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^3$ velja $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = -3$ in $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{b} = 1$. Obravnavaj rešljivost enačbe:

$$3(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 4(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a}).$$

2. Naj bo a dano realno število. Preslikava $\mathcal{A}$, ki slika iz prostora $\mathbb{R}_2[X]$ v prostor $\mathbb{R}^3$, je podana s predpisom

$$\mathcal{A}p = \left(p'(0) + a, 2p(0) + p(1), 3\int_0^1 p(t)\, dt\right).$$

   Najprej določi parameter a tako, da bo preslikava $\mathcal{A}$ linearna. Nato zapiši matriko A, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah obeh prostorov in določi bazo jedra preslikave $\mathcal{A}$.

3. Naj bo

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Izračunaj karakteristični polinom, določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A. Zapiši tudi Jordanovo kanonično obliko matrike A ter določi minimalni polinom matrike A.

4. Na prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ realnih polinomov stopnje največ dva definiramo linearne funkcionale:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\, dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\, dx, \quad f_3(p) = \int_0^3 p(x)\, dx.$$

   Dokaži, da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza duala $(\mathbb{R}_2[X])^*$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$ in poišči urejeno bazo $\{p_1, p_2, p_3\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$, da bo $\{f_1, f_2, f_3\}$ njej dualna baza.

Naloge so enakovredne.