Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 2. 2003

1. Težiščnica tristrane piramide je daljica, ki spaja oglišča piramide s težiščem nasprotne ploskve.
   (a) Dokaži, da se vse štiri težiščnice poljubne tristranične piramide sekajo v eni točki. V kakšnem razmerju ta točka deli težiščnico?
   (b) Dokaži, da če sta v tristrani piramidi dva para mimobežnih robov pravokotna, potem sta tudi ostala dva mimobežna robova med seboj pravokotna.

2. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica
$$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R})\,; AXB^T = C\right\}$$
vektorski podprostor v $M_n(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je $n = 3$ in
$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$$
definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.
   (c) Določi Jordanovo kanonično formo $J_{\mathcal{A}}$ operatorja $\mathcal{A}$ in zapiši bazo v kateri pripada operatorju $\mathcal{A}$ matrika $J_{\mathcal{A}}$.

4. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(3)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 30 + 25$.