

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 4. 2. 2004

1. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko $E_{12} - E_{21} \in M_2(\mathbb{R})$.
 - (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.
 - (b) Preveri, da je podprostor V zaprt za matrično množenje in velja $AB = BA$ za vse $A, B \in V$.
 - (c) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in V$ obstaja A^{-1} . Inverz tudi izračunaj!

Za matrično seštevanje in množenje je V torej komutativen obseg. Ali veš, kateremu komutativnemu obsegu je izomorfen?

2. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naj bo U množica vseh tistih matrik $X \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, za katere velja $AX = I$. Določi množico U in preveri, ali velja katera od naslednjih trditev:

- (a) U je vektorski podprostor v $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$,
- (b) $U = X_0 + V$, kjer je V podprostor v $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ in X_0 fiksna matrika.

Če velja katera od trditev, poišči eno od baz za nastopajoči podprostor. Ugotovi, če je med rešitvami tudi matrika $A^T (AA^T)^{-1}$.

3. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podana s predpisom

$$\mathcal{A}(x, y, z) = -\frac{1}{7}(3x + 2y - 6z, 2x + 6y + 3z, -6x + 3y - 2z).$$

Pokaži, da je \mathcal{A} zrcaljenje prostora \mathbb{R}^3 preko neke premice. Določi enačbo te premice v kanonski obliki!

4. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\mathcal{B} = \{(3i, 4), (7i, 1)\}$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 2i & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi matriko transformacije \mathcal{A}^* glede na bazo \mathcal{B} , če vzamemo v \mathbb{C}^2 običajni skalarni produkt.

Naloge so enakovredne.