

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 27. 1. 2003

1. (20) Dani sta ravnini $\pi : x - z = 1$ in $\Sigma : x - 2y + z = 1$.

(a) Zapiši enačbo premice p , ki je presek ravnin π in Σ .

(b) Določi enačbo ravnin, ki sta pravokotni na premico p in se dotikata sfere s središčem $S(1, 1, 1)$ in polmerom $r = \sqrt{3}$.

2. (25) Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica

$$U = \{X \in M_n(\mathbb{R}) ; AXB^T = C\}$$

vektorski podprostor v $M_n(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je $n = 3$ in

$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. (30) Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[X]$ realnih polinomov stopnje največ 3 je s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = p(x+1) - p(x)$$

definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$.

(a) Dokaži, da je \mathcal{A} linearna preslikava.

(b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi \mathcal{A} v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in določi podprostora $\text{Ker } \mathcal{A}$, $\text{Im } \mathcal{A}$.

(c) Določi Jordanovo kanonično formo $J_{\mathcal{A}}$ operatorja \mathcal{A} in zapiši bazo v kateri pripada operatorju \mathcal{A} matrika $J_{\mathcal{A}}$.

4. (25) Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(3)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.

(a) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F .

Točke so razporejene ob nalogah.