Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 4. 6. 2002

1. Na vsako od stranskih ploskev tristrane piramide, določene z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$, postavi pravokotni vektor, ki ima smer iz telesa in ima dolžino enako ploščini ustrezne stranske ploskve. Izračunaj vsoto teh vektorjev in absolutno vrednost mešanega produkta treh od teh vektorjev, izrazi jo z volumnom tristrane piramide.

2. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Naj bosta

$$U = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\} \quad \text{in} \quad V = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AX = -XA\}$$

množici matrik, ki komutirajo oz. antikomutirajo z matriko A.

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_n(\mathbb{R})$ in določi podprostor $U \cap V$. Kakšnemu pogoju mora zadoščati matrika A, da bo vsota $U + V$ direktna?

   (b) Za matriko $A = E_{11} + E_{13} + E_{22} \in M_3(\mathbb{R})$ določi baze in dimenzijo prostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Dana je matrika $A \in M_5(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči njen karakteristični polinom, lastne vrednosti in lastne podprostore. Določi tudi njeno jordansko matriko J in matriko prehoda P.

4. V evklidskem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ sta podana hiperravnina in premica

$$\pi = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\right\}, \; p = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = -z = 2t\right\}.$$

Naj bo $\mathcal{P} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ projektor na premico $p = \operatorname{Im} \mathcal{P}$ vzdolž hiperravnine $\pi = \operatorname{Ker} \mathcal{P}$.

   (a) Določi bazi danih podprostorov.

   (b) Poišči matriki, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ pripadata preslikavama $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}^*$.

   (c) Ali je $\mathcal{P}^*$ projektor? Če je, kam in vzdolž česa projecira?