Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 23. 6. 2003

1. Naj bodo A, B, C in D točke v prostoru.

   (a) Izračunaj vrednost izraza $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

   (b) Dokaži, da je D težišče trikotnika ABC natanko tedaj, ko je $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

2. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   Naj bo U množica vseh matrik, ki komutirajo z matrikama A in B ter V množica tistih matrik, ki komutirajo vsaj z eno od A in B.

   (a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši njegovo bazo.

   (b) Dokaži, da je V ni vektorski podprostor. Določi najmanjši vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$, ki vsebuje V. Zapiši tudi njegovo bazo!

3. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   ortogonalno podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako matriko P, da bo $D = P^T AP$.

4. V vektorski prostor $\mathbb{R}_2[X]$ je vpeljan tak skalarni produkt, da je $\{1-x, 1+2x, x^2\}$ ortonormirana baza tega prostora. Naj bo $U = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, p(1) = 0\}$. Poišči ortonormirani bazi podprostorov U in $U^{\perp}$ ter izračunaj pravokotno projekcijo polinoma $1 + x + x^2$ na podprostor U.

Naloge so enakovredne.