Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 9. 6. 2003

1. Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Ugotovi, kdaj je rešljiva vektorska enačba
$$(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a}) \left(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right) + \overrightarrow{a}$$
in jo reši.

2. (a) Naj bosta $\mathcal{A} : U \to V$ in $\mathcal{B} : V \to W$ linearni preslikavi. Dokaži, da za preslikavo $\mathcal{BA} : U \to W$ velja relacija
$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{BA} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim (\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}).$$
(b) Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ in $\mathcal{B} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisom:
$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p''(0) \\ p''(0) & p'(0) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(A) = \operatorname{Sled}(A).$$
Določi razsežnost in baze podprostorov $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}$ in $\operatorname{Ker} \mathcal{BA}$.

3. Endomorfizem $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom
$$\mathcal{P}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})\, \overrightarrow{a},$$
kjer je $\overrightarrow{a}$ dani enotski vektor.
   (a) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore ter geometrijski učinek endomorfizma $\mathcal{P}$.
   (b) Glede na običajni skalarni produkt določi pravilo za adjungirano preslikavo $\mathcal{P}^*$.

4. Endomorfizmu $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^{11}$ v standardni bazi pripada matrika A. Določi vse možne Jordanove forme J_A matrike A, če velja
$$\det A = 1,\ \dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} - \mathcal{I})^2 = 5,\ \dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} + \mathcal{I})^3 = 5.$$

Naloge so enakovredne.