Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 30. 6. 2004

1. Naj bo S sfera določena z enačbo $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2$ in p premica, ki je presek ravnin $x + z = 2$ in $5x - 2z = 3$.

   (a) Zapiši enačbo premice p in določi medsebojni odnos premice p in sfere S?

   (b) Poišči enačbe vseh ravnin, ki potekajo skozi izhodišče, se dotikajo sfere S in so vzporedne premici p.

   Nalogo opremi s pregledno skico!

2. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, AXA^T = X\}$ in $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, BXB^T = X\}$, kjer je

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[X]$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3)\,1 + (2x_1 + x_2 - x_4)x + (4x_1 + 2x_2 - 2x_4)\,x^2.$$

   Poišči taki urejeni bazi vektorskih prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}_2[X]$, v katerih bo linearni preslikavi $\mathcal{A}$ pripadala matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo V realni vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle \cdot | \cdot \rangle$ in $u \in V$ neničelni vektor. Preslikava $\mathcal{A} : V \to V$ je definirana s predpisom $\mathcal{A}x = x - \langle u | x \rangle\, u$.

   (a) Pokaži, da je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran operator.

   (b) Določi lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore operatorja $\mathcal{A}$.

   (c) Kateri lastnosti mora zadoščati vektor u, da bo $\mathcal{A}$ projektor?

   (d) Kateri lastnosti mora zadoščati vektor u, da bo $\mathcal{A}$ pozitiven operator?

Naloge so enakovredne.