Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 6. 2004

1. Naj bosta $p : 2x = -3y = 6z$ in $q : x = y = z$ premici v prostoru $\mathbb{R}^3$. Označimo z Σ ravnino, ki vsebuje premici p in q. Naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje čez premico q in $\mathcal{B}$ zrcaljenje čez ravnino Σ.

   (a) Za katere točke $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ velja $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{B}\vec{x}$? Kaj geometrijsko predstavlja ta množica? Zapiši njeno enačbo!

   (b) Zapiši matriko A, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada zrcaljenju $\mathcal{A}$.

   Naloga naj bo opremljena s skico!

2. Naj bo V množica vseh tistih matrik, ki komutirajo z matriko $3E_{12} - 2E_{21} \in M_2(\mathbb{R})$.

   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši primer njegove baze.

   (b) Preveri, da je podprostor V zaprt za matrično množenje in velja $AB = BA$ za vse $A, B \in V$.

   (c) Dokaži, da za vsak neničelni $A \in V$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

3. V $\mathbb{R}_3[X]$ uvedemo skalarni produkt tako, da je množica $\{1, 1-x, 1-x^2, 1-x^3\}$ ortonormirana baza. Naj bo $V = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, p(1) = p(-1)\}$. Poišči ortonormirani bazi podprostorov V in $V^\perp$ ter izračunaj pravokotno projekcijo polinoma $1 + x^2 + x^3$ na podprostor V.

4. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem vektorskega prostora V. Dokaži, da endomorfizem $\mathcal{A}$ zadošča $\operatorname{im} \mathcal{A}^2 = \operatorname{im} \mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $V = \ker \mathcal{A} \dotplus \operatorname{im} \mathcal{A}$.

Naloge so enakovredne.