Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 30. 6. 2005

1. Dana je vektorska enačba
$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} - \vec{a} = (\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{b},$$
kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Ugotovi, kateremu pogoju morata zadoščati vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, da bo dana vektorska enačba rešljiva. V tem primeru rešitev tudi poišči!

2. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom
$$\mathcal{A}p = \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ p'(1) & p(-1) \end{bmatrix}.$$
   (a) Določi podprostora $\operatorname{im}\mathcal{A}$ in $\ker\mathcal{A}$. Zapiši njuni bazi in razsežnost!
   (b) Reši enačbo $\mathcal{A}p = E_{11} + E_{12} + E_{21} + E_{22}$.

3. Določi vse $a \in \mathbb{C}$, pri katerih matrika
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a & -a-2 \end{bmatrix}$$
ne bo diagonalizabilna. Za dobljene $a \in \mathbb{C}$ poišči minimalni polinom matrike A in njeno jordansko matriko J_A.

4. Bilinearna preslikava $h : \mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ je definirana s predpisom
$$h(p,q) = p(-1)\,q(-1) + p(0)\,q(0) + p(1)\,q(1).$$
   (a) Zapiši matriko ki pripada preslikavi h v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Dokaži, da je h skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Poišči kako ortonormirano bazo podprostora
$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[X] \,|\, p(1) = p(-1)\}$$
   in jo dopolni do ortonormirane baze prostora $\mathbb{R}_2[X]$.

Naloge so enakovredne.