Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 6. 2005

1. Premica p je presek ravnin
$$\pi : x - y + z = 1 \quad \text{in} \quad \Sigma : x + 2y + z = 4.$$
Zapiši enačbo ravnine Π, ki vsebuje premico p in oklepa z ravnino π kot $60°$. Kakšen kot oklepa ravnina Π z ravnino Σ? Koliko je vseh rešitev?

2. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
in množici
$$U = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\} \quad \text{in} \quad V = \left\{X \in M_3(\mathbb{R}) \,|\, A^T X = X A^T\right\}.$$
Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora v $M_3(\mathbb{R})$. Poišči najmanjši podprostor prostora $M_3(\mathbb{R})$, ki vsebuje podprostora U in V, in največji podprostor v $M_3(\mathbb{R})$, ki je vsebovan v obeh podprostorih U in V. Zapiši njuni bazi!

3. Dana sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{b} + 2(\vec{x} \cdot \vec{b})\vec{a} \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$
   (a) Določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (c) Poišči lastne vrednosti in lastne vektorje endomorfizma $\mathcal{A}$, če veš, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ortogonalna.

4. Vektorski prostor $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s takim skalarnim produktom $\langle . | . \rangle$, da je množica $\{1 - x, 1 + 2x, x^2\}$ ortonormirana. O linearnem funkcionalu $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$ vemo
$$f\left(2 + x + x^2\right) = 2, \quad f\left(1 + 2x + x^2\right) = 4 \quad \text{in} \quad f\left(1 + x + 2x^2\right) = 6.$$
   (a) Določi predpis za linearni funkcional f.
   (b) Kateri polinom $q \in \mathbb{R}_2[X]$ ustreza funkcionalu f po Rieszovem izreku?

Naloge so enakovredne.