Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 30. 6. 2006

1. Zapiši koordinate oglišč B in C enakostraničnega trikotnika ΔABC, če poznaš oglišče $A(-1,2,-1)$ in veš, da leži stranica BC na premici p, določeni s presekom ravnin
$$\pi : 3x + y - z = 4 \quad \text{in} \quad \Sigma : x - 2y + 2z = -1.$$

2. Preslikava $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}(X) = AXA^T,$$
kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Za $n = 3$ in
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
določi razsežnost in bazo podprostora $\ker \mathcal{A}$.

3. Poišči karakteristični polinom, minimalni polinom in Jordanovo kanonično obliko matrike
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

4. (a) Določi $\lambda \in \mathbb{R}$ tako, da bo s predpisom
$$\langle (x_1, y_1) \mid (x_2, y_2) \rangle = \lambda x_1 x_2 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 2 y_1 y_2$$
definiran skalarni produkt na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^2$.
   (b) Prostor $\mathbb{R}^2$ opremimo s skalarnim produktom iz točke (a), kjer je $\lambda = 2$. Linearni funkcional $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deluje takole: $f(x, y) = 2x + y$, za vsak $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Določi Rieszov vektor, ki pripada funkcionalu f!

Naloge so enakovredne.