

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 7.9.2001

1. Naj bodo \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} paroma pravokotni vektorji iz \mathbb{R}^3 z dolžinami $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$ in $|\vec{c}| = 3$. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji

$$\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{q} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{r} = \vec{a} + 2\vec{b}.$$

2. Naj bo a realno število in

$$A = \begin{vmatrix} 1-a & a & 2-a & 2 \\ -a & 1+a & 3-a & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Za katera realna števila a lahko matriko A diagonaliziramo? V tem primeru določi tudi ustrezno diagonalno in prehodno matriko. Odgovor utemelji!

3. Za realno število a tvorimo matriko

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX - XA$. Dokaži, da je \mathcal{T} linearna preslikava. Poišči matriko, ki preslikavi \mathcal{T} pripada v standardni bazi prostora matrik $\{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$. Določi tudi razsežnost jedra preslikave \mathcal{T} v odvisnosti od parametra a .

4. V prostoru \mathbb{R}^3 z običajnim skalarnim produktom naj bo \mathcal{A} projekcija na ravnino $\pi : 2x - y + z = 0$ v smeri premice $p : x = y = 0$. Poišči matriki v standardni bazi za preslikavi \mathcal{A} in \mathcal{A}^* , določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave \mathcal{A}^* .