Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

IZPIT IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 9. 2002

1. V trapezu $ABCD$ je krak AD pravokoten na osnovnico in diagonali sta pravokotni ena na drugo.
   (a) Izračunaj razmerje $|DC| : |AB|$.
   (b) Naj bo E razpolovišče daljice DC in S presečišče daljic AC in BE. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$ ter določi vrednost razmerja $|AS| : |SC|$.

2. Ugotovi za katere vrednosti realnih parametrov je sistem:
$$\begin{aligned} x + y + 2z - t &= 1 \\ 2x + 3y + 5z &= 0 \\ 3x + (a+3)\,y + 6z + (a-3)\,t &= 1 \\ x + 3y + 4z + (a+1)\,t &= b \end{aligned}$$
   protisloven, enolično rešljiv in nedoločen. Rešitve tudi poišči!

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$ realnih polinomov stopnje največ $n \in \mathbb{N}$ je s predpisom
$$(\mathcal{A}p)(x) = (x+1)\,p'(x)$$
   definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearni operator.
   (b) Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_n[X]$ pripada operatorju $\mathcal{A}$.
   (c) Določi podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?
   (d) Ali obstaja baza, v kateri operatorju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Če obstaja, zapiši to bazo in pripadajočo diagonalno matriko.

4. V $\mathbb{R}^3$ vpeljemo skalarni produkt tako, da je množica $\{(1,0,0), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ ortonormirana baza. Poišči kot med vektorjema $u_1 = (0,1,0)$ in $u_2 = (0,0,1)$ in pravokotno projekcijo vektorja u_1 na vektor $u_3 = (1,0,1)$.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 25 + 30 + 20$.