Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 10. 12. 2004

1. Dana je kocka $ABCDEFGH$ z osnovno stranico dolžine a. Naj telesna diagonala AG prebada trikotnik ΔCHF v točki T.

   (a) Z uporabo vektorskega in mešanega produkta izračunaj ploščino trikotnika ΔCHF in prostornino piramide $CHFA$.

   (b) Vektor $\overrightarrow{AT}$ izrazi z vektorji $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ in $\overrightarrow{AH}$. Kaj ugotoviš?

2. Dana je ravnina $\pi : 2x + y - z = 0$ in točki $A(-1, 2, 2)$, $B(3, 0, 0)$. Naj bo M množica točk v ravnini π, ki so enako oddaljene od točk A in B.

   (a) Določi množico M. Zapiši njeno enačbo!

   (b) Poišči vse tiste točke $T \in M$, za katere velja, da je trikotnik ΔATB pravokoten.

3. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja v $\mathbb{R}^3$. Kateri vektorji $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ rešijo obe enačbi
$$[\vec{x}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{b}] = 0 \quad \text{in} \quad \vec{x} \times \vec{b} + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{b} \times \vec{a}) = \vec{0}\ ?$$

4. Dana je matrika
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n, če je $A = 2I + J$.

   (b) Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko J. Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko B zapisati v obliki $B = \alpha I + \beta J + \gamma J^2$, kjer so α, β in γ ustrezna realna števila.

Opomba. Pri prvih dveh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 25 + 20 + 30$.