Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 16. 12. 2005

1. V tristrani piramidi $ABCD$ z osnovno ploskvijo ABC je točka E težišče trikotnika ΔBCD, točka F pa razpolovišče stranice AC. Označimo vektorje $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ in $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.
   (a) Naj bo S točka, v kateri daljica AE prebada trikotnik ΔFBD. Izrazi vektor $\overrightarrow{AS}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
   (b) Točka G leži na daljici FD tako, da se daljici BG in AE sekata. V kakšnem razmerju deli točka G daljico FD?

2. Med vsemi premicami, ki ležijo v ravnini $\pi : x - 2y + 2z = 18$ in so vzporedne z ravnino $\Sigma : 2x - 4y - 5z = 0$, poišči premico p, ki je najbližja točki $A\,(0, 1, 1)$. Kolikšna je razdalja med premico p in točko A?

3. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enako dolga linearno neodvisna vektorja v prostoru $\mathbb{R}^3$. Obravnavaj vektorsko enačbo
$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{x})\vec{b} = \vec{a} \times (\vec{x} - \vec{b}).$$

4. Dani sta matriki
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   Naj bo $A = XY^T$ in $B = Y^T X$
   (a) Izračunaj A^{2005}.
   (b) Poišči vse matrike $X' \in M_3(\mathbb{R})$, za katere velja $BX' = B^T X'$. Preveri, da lahko vsako tako matriko zapišeš v obliki
$$X' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},$$
   kjer so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Opomba. Pri prvih dveh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.