Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

1. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 20. 11. 2003

1. V tetraedru $ABCD$ naj točka E razdeli stranico AC v razmerju $AE : EC = 2 : 1$, točka F stranico AD v razmerju $AF : FD = 1 : 1$ in točka G stranico BC v razmerju $BG : GC = 4 : 1$. Točke E, F in G določajo ravnino, ki seka stranico BD v točki T. V kakšnem razmerju točka T deli stranico BD?

2. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ geometrijski vektorji. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$; prostornino izrazi z mešanim produktom $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

3. Dani sta ravnini $\pi : x - y + z = 1$ in $\Sigma : 2x + y - 2z = 1$. Premica p naj bo presek ravnin π in Σ. Če vsako točko $T \in \pi$ prezrcalimo čez ravnino Σ dobimo ravnino π', ki je zrcalna slika ravnine π glede na ravnino Σ.

   (a) Zapiši enačbo premice p.

   (b) Zapiši enačbo ravnine π'.

4. Dani sta matriki $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ in $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Naj bo $A = 2XX^T + Y^TY$ in $B = XY + (XY)^T$

   (a) Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj A^n.

   (b) Poišči vse matrike, ki komutirajo z matriko B. Pokaži, da je mogoče vsako tako matriko zapisati v obliki

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

   kjer so α, β in γ realna števila.

Opomba. Pri prvih treh nalogah je obvezna skica!

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.