Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 18. 12. 2001

1. Reši matrično enačbo $A^{-1}XA^2 = A^{-1}CA - 2A^{-1}XA$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Realno matriko dimenzije $n \times n$ imenujemo ortogonalna matrika, če velja $AA^T = A^TA = I$.
   (a) Pokaži, da je
   $$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
   ortogonalna matrika dimenzije 3×3.
   (b) Dokaži, da je produkt ortogonalnih matrik spet ortogonalna matrika.
   (c) Izračunaj determinanto ortogonalne matrike.

3. Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$:
$$\begin{bmatrix} x & 2a & 3a & \cdots & na \\ 2a & 4x & 6a & \cdots & 2na \\ 3a & 6a & 9x & \cdots & 3na \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ na & 2na & 3na & \cdots & n^2x \end{bmatrix}.$$

4. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ realnih $n \times n$ matrik je dana podmnožica $V = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AX - XA^T = 0\right\}$, kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.
   (a) Dokaži, da je V realni vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) V primeru, ko je $n = 3$ in $A = E_{12} + E_{23}$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostora V.

Naloge so enakovredne.