Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 20. 12. 2002

1. (25) Reši matrično enačbo $A^T X B = A + \left(X^T A\right)^T$, kjer je

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Glede na parameter a določi rank X. Kaj lahko poveš o obrnljivosti matrike X?

2. (25) Dokaži, da za naslednjo determinato velikosti $2n \times 2n$ velja:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & \frac{b}{2n} \\ 0 & \frac{a}{4} & & \cdots & \cdots & & \frac{b}{2(2n-1)} & 0 \\ & & \ddots & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \frac{a}{n^2} & \frac{b}{n(n+1)} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \frac{b}{n(n+1)} & \frac{a}{(n+1)^2} & & \vdots & \vdots \\ & & & & & \ddots & & \\ 0 & \frac{b}{2(2n-1)} & & \cdots & \cdots & & \frac{a}{(2n-1)^2} & 0 \\ \frac{b}{2n} & 0 & & \cdots & \cdots & & 0 & \frac{a}{4n^2} \end{vmatrix} = \frac{(a^2-b^2)^n}{(2n!)^2}.$$

   Če ne znaš naloge rešiti v splošnem, reši nalogo za $n = 3$ [15 T].

3. (30) Naj bo

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix}; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

   podmnožica realnega vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$.

   (a) Dokaži, da je H realni vektorski podprostor prostora $M_2(\mathbb{C})$. Koliko je njegova dimenzija? Zapiši tudi primer baze podprostora H!

   (b) Preveri, da je podprostor H zaprt za matrično množenje.

   (c) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in H$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

4. (20) Naj bosta $U = \{p \in R_n[X] \,|\, \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 0\}$ in $V = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, p'(1) = 0\}$ vektorska podprostora polinomov stopnje največ 3. Določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.