Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 17. 2. 2005

1. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici
$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, A - A^T \text{ je diagonalna matrika} \right\} \quad \text{in}$$
$$V = \mathcal{L}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$
Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in poišči baze podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$. Vse dane vektorske podprostore, glede na to, katere matrike vsebujejo, tudi ustrezno poimenuj!

2. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in
$$A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & -b \\ 1 & a & -b & 1 \\ 1 & -b & a & 1 \\ -b & 1 & 1 & a \end{bmatrix}.$$
Izračunaj determinanto matrike $A_{a,b}$ in določi vse pare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, pri katerih matrika $A_{a,b}$ ni obrnljiva.

3. Naj bodo $A, B, X \in M_n(\mathbb{R})$.
   (a) Naj bo A matrika s celoštevilskimi koeficienti. Poišči potreben in zadosten pogoj, da bo obstajala inverzna matrika A^{-1}, ki bo imela tudi celoštevilske koeficiente.
   (b) Naj bo $\det B + \det A = 1$. Izračunaj determinanto matrike X, če med matrikami velja zveza $2A^2X - XB = 0$.

4. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$
Naj bo U množica vseh tistih matrik $X \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, za katere velja $XA^T = I$. Določi množico U in preveri, ali velja katera od naslednjih trditev:
   (a) U je vektorski podprostor v $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$,
   (b) $U = X_0 + V$, kjer je V podprostor v $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ in X_0 fiksna matrika.

   Če velja katera od trditev, poišči eno od baz za nastopajoči podprostor.

Naloge so enakovredne.