Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 15. 2. 2006

1. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ realni $n \times n$ matriki.
   (a) Določi matriko $C \in M_n(\mathbb{R})$ tako, da bo množica
   $$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, AX - XB^T = C\right\}$$
   vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) V primeru $n = 3$ izračunaj razsežnost in poišči kako bazo prostora U, če je
   $$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
2. Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$:
   $$\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{b}{3} & \cdots & \frac{b}{n} \\ \frac{b}{2} & \frac{a}{4} & \frac{b}{6} & \cdots & \frac{b}{2n} \\ \frac{b}{3} & \frac{b}{6} & \frac{a}{9} & \cdots & \frac{b}{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b}{n} & \frac{b}{2n} & \frac{b}{3n} & \cdots & \frac{a}{n^2} \end{bmatrix}.$$
   Če ne znaš naloge rešiti v splošnem, reši nalogo za $n = 5$ (15 točk).
3. Glede na vrednosti realnih parametrov a in b obravnavaj in reši linearni sistem:
   $$\begin{aligned} x - 2y + bz - v &= 0, \\ x - y - 2z + 2v &= 0, \\ 2x - 3y + bz - v &= 0, \\ x - y + 2z + 2av &= b. \end{aligned}$$
4. Naj bosta
   $$U = \mathcal{L}\left\{1 + x, 3 + x^3, 3 - x + 2x^3, 1 + x^3\right\} \quad \text{in}$$
   $$V = \mathcal{L}\left\{2 - x - x^3, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x^2 + 2x^3, 2 - x + x^2 + 2x^3\right\}$$
   podprostora v vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}[X]$. Poišči baze podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

Naloge so enakovredne.