Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

2. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 1. 2003

1. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, \det(A+X) = \det A + \det X\}.$$

   (a) Dokaži, da je V vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Določi bazo in razsežnost podprostora V.

2. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ sta dani podmnožici $U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, JA = AJ\}$ in $V = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, JA^T = AJ\right\}$, kjer je $J \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.

   (a) Dokaži, da sta U in V vektorska podprostora prostora $M_n(\mathbb{R})$.

   (b) Za primer $n = 3$ in $J = E_{13} + E_{22} + E_{31} \in M_3(\mathbb{R})$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostorov U, V, $U \cap V$ in $U + V$.

3. Dana je matrična enačba

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Za katere vrednosti parametra a je dana enačba rešljiva?

   (b) Določi matriko X, če je $a = 4$.

4. Dokaži, da za naslednjo determinato velikosti $n \times n$ velja:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ -b & a & b & \cdots & b & b \\ -b & -b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b & -b & -b & \cdots & a & b \\ -b & -b & -b & \cdots & -b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left((a+b)^n + (a-b)^n\right).$$

   Če ne znaš naloge rešiti v splošnem, reši nalogo za $n = 5$ [15 T].

Naloge so enakovredne.