Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika-enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 5.4.2001

1. Naj bo $\mathcal{B} = \{(1,0,2)\,, (1,1,4)\,, (0,1,3)\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Zapiši matriko zasuka prostora $\mathbb{R}^3$ za kot $\frac{\pi}{3}$ v pozitivni smeri okoli osi y v bazi $\mathcal{B}$.

2. Naj bo $\mathcal{A} : V \to V$ linearni operator ranga 1, to pomeni $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 1$.
   (a) Dokaži, da obstaja tak element $c \in \mathbb{F}$, da je $\mathcal{A}^2 = c\mathcal{A}$.
   (b) Kaj so lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$?

3. Določi Jordanovo kanonično obliko J in tako matriko P, da bo $J = P^{-1}AP$ za matriko
$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 9 & -6 \end{bmatrix}.$$

4. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem in $\mathcal{P}$ projektor vektorskega prostora V. Dokaži:
   (a) Podprostor $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ je invarianten za operator $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{PAP} = \mathcal{AP}$.
   (b) Podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{P}$ sta oba invariantna za operator $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko velja $\mathcal{PA} = \mathcal{AP}$.

Naloge so enakovredne.