Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 26. 4. 2005

1. Za vsak $a \in \mathbb{R}$ naj bo linearna preslikava $\mathcal{A}_a : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ definirana s predpisom
$$\mathcal{A}_a : p(x) \longmapsto \begin{bmatrix} p(0) + p(1) & p''(0) + ap''(1) \\ p'(0) & p'''(0) \end{bmatrix}.$$
   (a) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}_a$ v standardnih urejenih bazah prostora $\mathbb{R}_3[X]$ in $M_2(\mathbb{R})$.

   (b) Glede na vrednosti parametra a obravnavaj razsežnost jedra in slike preslikave $\mathcal{A}_a$. Za vsak primer posebej določi tudi bazi jedra in slike!

2. Naj bosta $\mathcal{A} : U \to V$ in $\mathcal{B} : V \to W$ linearni preslikavi. Dokaži, da za linearno preslikavo $\mathcal{BA} : U \to W$ velja relacija
$$\dim \operatorname{im}(\mathcal{BA}) = \dim \operatorname{im} \mathcal{A} - \dim(\operatorname{im} \mathcal{A} \cap \ker \mathcal{B}).$$

3. Endomorfizem $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom
$$\mathcal{P}(x, y, z) = (-x + y + 2z, 6x - 2y - 6z, -4x + 2y + 5z).$$
   (a) Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore endomorfizma $\mathcal{P}$.

   (b) S pomočjo točke (a) opiši zakaj je $\mathcal{P}$ geometrijska projekcija. Kam in vzdolž česa projecira?

4. Poišči Jordanovo kanonično obliko J_A, karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ in minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrike
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 8 & -6 \end{bmatrix},$$
če veš, da sta njeni edini lastni vrednosti enaki -1 in -2.

Točke so razporejene po nalogah: $25 + 20 + 25 + 30$.