Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 26. 4. 2006

1. Naj bosta $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom
$$\mathcal{A}\vec{x} = 2\vec{x} + (\vec{x} \cdot \vec{a})\,\vec{b}.$$
   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.
   (b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$.
   (c) V odvisnosti od vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$.

2. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je odvajanje, torej $\mathcal{A}p = p'$. Linearni preslikavi $\mathcal{B} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ pa v bazi $\{1, x + x^2, x - x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$ ustreza matrika
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$ pripada preslikavi $\mathcal{AB}$.

3. Endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je podan s predpisom
$$\mathcal{A}(x, y, z) = \frac{1}{5}(3x - 4z, 5y, -4x - 3z).$$
   (a) Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore endomorfizma $\mathcal{A}$.
   (b) S pomočjo točke (a) opiši geometrijsko delovanje preslikave $\mathcal{A}$.

4. Dana je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$
Poišči karakteristični polinom p_A, minimalni polinom m_A, Jordanovo kanonično obliko J_A in matriko prehoda P, da bo $J_A = P^{-1}AP$.

Naloge so enakovredne.