Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 23. 1. 2002

1. Preslikava $\mathcal{A} : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{A}(X) = a\left(X + X^T\right)$, kjer je $a \in \mathbb{R}$ neničelna konstanta.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

   (b) Določi vektorska podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.

   (c) Določi konstanto a tako, da bo $\mathcal{A}$ projektor.

2. Endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[X]$ je podan s predpisom: $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(1+x) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{A}(x+x^2) = -2x + 2x^2$, $\mathcal{A}(x^2+x^3) = -x + x^2 - x^3 + x^4$ in $\mathcal{A}(x^3+x^4) = -2x^3 + 2x^4$.

   (a) Poišči matriko A, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_4[X]$.

   (b) Določi podprostore $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}^2$.

3. Prepričaj se, da je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

   podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

4. Dokaži, da so za vektorski prostor V naslednje trditve ekvivalentne:

   (a) $\dim V \geq 2$.

   (b) Obstajata neničelna vektorska podprostora U in W, da velja $V = U \oplus W$.

   (c) Obstaja neničelni projektor $\mathcal{P} : V \to V$, katerega $\operatorname{Ker}\mathcal{P} \neq 0$.

Naloge so enakovredne.