Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko
Matematika - enopredmetni študij

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 24. 1. 2003

1. Preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ sta definirani s predpisom:
$$\mathcal{A}p = \int_0^1 p(x)\,dx \quad \text{in} \quad \mathcal{B}p = p'(2) \quad \text{za vsak } p \in \mathbb{R}_n[X].$$
   (a) Dokaži, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ linearni preslikavi.
   (b) Za primer $n = 3$ določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \operatorname{Ker}\mathcal{B}$.

2. Naj bo $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ pravokotna projekcija prostora $\mathbb{R}^3$ na ravnino $x = 0$ in naj bo $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zasuk prostora $\mathbb{R}^3$ okoli osi z za kot $\frac{\pi}{6}$ v negativnem smislu.
   (a) Kakšne matrike pripadajo linearnim preslikavam $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{BA}$ v standardni bazi vektorskega prostora $\mathbb{R}^3$.
   (b) Kaj geometrijsko predstavljata jedro in slika preslikave $\mathcal{BA}$? Določi še lastne vrednosti in lastne podprostore preslikave $\mathcal{BA}$.

3. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\{(1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $\{(1,2), (1,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Poišči podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, zapiši njuno bazo.
   (b) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$.

4. Prepričaj se, da je matrika
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$
podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $D = P^{-1}AP$.

Naloge so enakovredne.