

3. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 31. 3. 2004

1. Preslikava $\mathcal{T} : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ je definirana s predpisom $\mathcal{T}(X) = AX + XA$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (a) Dokaži, da je \mathcal{T} linearna preslikava.
(b) Zapiši matriko, ki pripada preslikavi \mathcal{T} v standardni bazi prostora $M_2(\mathbb{R})$.
(c) Glede na vrednosti parametrov a in b obravnavaj razsežnost jedra in slike preslikave \mathcal{T} . Za vsak primer posebej določi tudi bazo jedra!
2. Preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$ pripada iz standardne baze prostora $\mathbb{R}_2[X]$ v bazo $\{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ prostora \mathbb{R}^3 matrika A in preslikavi $\mathcal{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_1[X]$ pripada iz standardne baze prostora \mathbb{R}^3 v bazo $\{1 + 2x, 2 + x\}$ prostora $\mathbb{R}_1[X]$ matrika B ;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{B}\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_2[X]$ in $\mathbb{R}_1[X]$?

3. Naj bo linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podana s predpisom:

$$\mathcal{A}(x, y, z) = -\frac{1}{3}(2x - 2y - z, -2x - y - 2z, -x - 2y + 2z).$$

Poišči lastne vrednosti in lastne podprostore preslikave \mathcal{A} . Opiši geometrijsko delovanje preslikave \mathcal{A} !

4. Naj bo A poljubna kvadratna matrika. Z uporabo minimalnega polinoma dokaži, da A^{-1} obstaja in se da izraziti kot polinom matrike A natanko tedaj, ko 0 ni lastna vrednost matrike A .

Točke so razporejene po nalogah: 30 + 25 + 25 + 20.