

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE 1

Maribor, 8. 4. 2002

1. Poišči Jordanovo kanonično obliko, bazo, v kateri ima to obliko ter minimalni polinom za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. V prostoru \mathbb{R}^3 z običajnim skalarnim produktom preslikava A zrcali pravokotno čez premico $p : x = y = z$. Poišči matriki v standardni bazi za preslikavi \mathcal{A} in \mathcal{A}^* , določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave \mathcal{A}^* . Kaj ugotoviš?
3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_2[X]$ je dan skalarni produkt $\langle p|q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ in linearni funkcional $F(p) = p(2)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$.
- (a) Določi jedro funkcionala F . Koliko je dimenzija jedra?
 - (b) Funkcional F izrazi kot linearno kombinacijo funkcionalov iz dualne baze standardne baze $\{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
 - (c) Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala F .
4. Naj bosta \mathcal{A} in \mathcal{B} linearna operatorja na unitarnem prostoru. Dokaži naslednji trditvi:
- (a) Zaloga vrednosti operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ je enaka zalogi vrednosti operatorja \mathcal{A}^* .
 - (b) Jedro operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{B}^*\mathcal{B}$ je enako preseku jeder operatorjev \mathcal{A} in \mathcal{B} .

Naloge so enakovredne.