

## 4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 17. 4. 2003

1. Poišči Jordanovo kanonično obliko matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in tako matriko prehoda  $P$ , da bo  $J_A = P^T A P$ . Določi tudi karakteristični in minimalni polinom matrike  $A$ .

2. Naj bo  $V = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$  vektorski prostor simetričnih realnih  $n \times n$  matrik. Definirajmo preslikavo  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  s predpisom

$$\langle A|B \rangle = \text{sled}(AB)$$

za vsak  $A, B \in V$ .

(a) Dokaži, da je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  skalarni produkt na  $V$ .

(b) Za primer  $n = 2$  poišči ortonormirano bazo prostora  $V$ .

3. V prostoru  $\mathbb{R}^3$  z običajnim skalarnim produktom preslikava  $\mathcal{A}$  projicira na premico  $p : x = y = z$  vzdolž ravnine  $\pi : x + y = 0$ . Poišči matriki v standardni bazi za preslikavi  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{A}^*$ , določi njune lastne vrednosti, lastne podprostore in opiši geometrijski učinek preslikave  $\mathcal{A}^*$ .

4. Realna kvadratna forma  $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  je podana s predpisom

$$\mathcal{Q}(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 12xy + 8xz + 4yz.$$

(a) Zapiši simetrično matriko  $Q$ , ki pripada formi v standardni bazi prostora  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Z ortogonalnimi transformacijami prevedi formo  $\mathcal{Q}$  v obliko s samimi kvadratnimi členi.

(c) Kakšno ploskev v  $\mathbb{R}^3$  predstavlja enačba  $Q(x, y, z) = 27$ ? Zapiši njene glavne osi in ploskev tudi skiciraj!

Naloge so enakovredne.