Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 3. 6. 2005

1. Za matriko
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
poišči tako unitarno matriko P, da bo $\bar{P}^T AP$ diagonalna matrika.

2. Vektorski prostor polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s skalarnim produktom
$$\langle p|q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx. \tag{1}$$
   (a) Poišči kako ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je določen s predpisom $(\mathcal{A}p)(x) = (xp(x))'$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[X]$. Določi predpis za adjungirani endomorfizem $\mathcal{A}^*$.

3. Na vektorskem prostoru polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ so dani linearni funkcionali
$$f_i(p) = p(i-1), \quad i = 1, 2, 3.$$
   (a) Dokaži, da funkcionali $\{f_1, f_2, f_2\}$ tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}_2[X]^*$.
   (b) Kateri polinom po Rieszovem izreku ustreza funkcionalu f_2 glede na skalarni produkt definiran s predpisom (1)?

4. Naj bo $\mathcal{A}$ zrcaljenje običajnega evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ preko premice $2x = y = 2z$. Opiši geometrijski učinek preslikave $\mathcal{A}^*$! V standardni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ zapiši matriko preslikave $\mathcal{A}^*$ in določi njene lastne vrednosti in lastne podprostore.

Naloge so enakovredne