Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 8. 6. 2006

1. Vektorski prostor realnih polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s skalarnim produktom

$$\langle p|q\rangle = p(-1)\,q(-1) + p(0)\,q(0) + p(1)q(1). \tag{1}$$

Ugotovi, kateri polinom iz podprostora

$$V = \{p \in \mathbb{R}_2[X]\,|p(1) - p'(1) = 0\}$$

je najbližje polinomu $x^2 - x - 1$.

2. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ so podani linearni funkcionali

$$f_1(x,y,z) = z - x\ , \quad f_2(x,y,z) = x - y\ , \quad f_3(x,y,z) = y + z.$$

(a) Dokaži, da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza duala $(\mathbb{R}^3)^*$ prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Poišči urejeno bazo $\{v_1, v_2, v_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, da bo $\{f_1, f_2, f_3\}$ njej dualna baza.

3. Endomorfizem $\mathcal{A} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ je določen s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = xp'(x) + \int_0^x tp''(t)\,dt.$$

Določi, katera matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}^*$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_2[X]$? Prostor $\mathbb{R}_2[X]$ je opremljen s skalarnim produktom (1)!

4. Endomorfizem $\mathcal{A}$ zasuče prostor $\mathbb{R}^3$ za $\pi/6$ v pozitivni smeri okrog osi, ki jo določa vektor $(1,-1,-1)$. V primerni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ poišči matriko preslikave $\mathcal{A}$ in določi $\mathcal{A}(1,1,1)$!

Naloge so enakovredne.