Pedagoška fakulteta Maribor
Oddelek za matematiko in računalništvo
Matematika - enopredmetni študij

4. KOLOKVIJ IZ ALGEBRE I

Maribor, 24. 5. 2004

1. Glede na standardno bazo in glede na običajni skalarni produkt v prostoru $\mathbb{R}^4$ določi matriko zrcaljenja čez podprostor
$$V = \{(x, y, z, w)\,|x + y - z - w = 0, x - y + z - w = 0\}\,.$$
2. Naj bosta u in v linearno neodvisna vektorja končno razsežnega realnega vektorskega prostora V s skalarnim produktom $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Linearni operator $\mathcal{A} : V \to V$ je definiran s predpisom $\mathcal{A}x = \langle x|v\rangle\, u$.
   (a) Določi predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.
   (b) Določi lastne vrednosti in ustrezne lastne podprostore operatorja $\mathcal{A}$. Ali se (oz. kdaj se) da operator $\mathcal{A}$ diagonalizirati? Odgovor utemelji!
3. Naj bo linearni operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podan s predpisom
$$\mathcal{A}\,(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, -x - z, 2x + 2y + 3z)\,.$$
   (a) Določi predpis za adjungiran operator $\mathcal{A}^*$. V $\mathbb{R}^3$ vzamemo običajni skalarni produkt.
   (b) Operator $\mathcal{A}^*$ je projektor. Določi podprostor in kot vzdolž katerega $\mathcal{A}^*$ slika na svojo zalogo vrednosti.
4. Realna kvadratna forma $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom
$$\mathcal{Q}\,(x, y, z) = x^2 + y^2 - 3z^2 - 2xy - 6xz - 6yz.$$
   (a) Poišči ortogonalno bazo v $\mathbb{R}^3$, v kateri ima forma $\mathcal{Q}$ samo kvadratne člene. Zapiši tudi zveze med starimi in novimi spremenljivkami.
   (b) Katero ploskev v $\mathbb{R}^3$ predstavlja enačba $Q\,(x, y, z) = 6$? Zapiši njene glavne osi in ploskev tudi skiciraj!

Naloge so enakovredne.