Vaje 19: Adjungirani operatorji II

Naloge na vajah:

Normalni operatorji

N1. Dokaži, da je operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiran s predpisom $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{a} \times \vec{x}$, normalen operator.

N2. Naj bosta B in C realni matriki in

$$A = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}$$

ter $D = B + iC$ kompleksna matrika. Dokaži, če je A realna normalna matrika, potem je D kompleksna normalna matrika.

N3. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ normalna opertorja. Dokaži:

(a) $\ker \mathcal{A} = (\operatorname{im} \mathcal{A})^{\perp}$;

(b) če je $\mathcal{A}\mathcal{B} = 0$, potem je $\mathcal{B}\mathcal{A} = 0$.

Ortogonalni in unitarni operatorji

O1. Dopolni dano matriko do unitarne matrike:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{i}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}.$$

O2. Dokaži, da za vsako unitarno matriko U velja $|\det U| = 1$.

O3. Naj bosta A in D matriki iz naloge N2. Dokaži, če je A realna ortogonalna matrika, potem je kompleksna matrika D unitarna.

O4. Poišči matriko, ki pripada v $\mathbb{R}^3$ rotaciji za kot $\frac{\pi}{2}$ v negativnem smislu okoli vektorja $(0, 1, 2)$.

O5. Okrog katere premice skozi izhodišče in za kolikšen kot je treba zasukati prostor $\mathbb{R}^3$, da bo vektor $e_1 = (1, 0, 0)$ prešel v vektor, ki ima isto smer kot $(1, 2, 2)$, vektor $e_2 = (0, 1, 0)$ pa v vektor, ki ima isto smer kot $(2, 1, -2)$?

O6. Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

poišči tako ortogonalno matriko P, da bo $P^T AP$ diagonalna matrika. Določi tudi tako matriko Q, da bo imela matrika $Q^T AQ$ po diagonali smo vrednosti 0, 1 ali -1. Lastne vrednosti matrike A so $0, 6, -6$.

O7. Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

poišči tako unitarno matriko P, da bo $P^H A P$ diagonalna matrika.

Sebi adjungirani operatorji

S1. Naj bo $V = \{p \in \mathbb{R}_n[X], p(0) = p(1) = 0\}$ vektorski prostor s skalarnim produktom

$$\langle p|q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx.$$

Pokaži, da je operator odvajanja $\mathcal{D}$ na V antisimetričen.

S2. Naj bo $\mathcal{A}$ obrnljiv operator na V. Dokaži, da je $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ pozitiven sebi adjungiran operator.

S3. Naj bo $\mathcal{A}$ pozitiven sebi adjungiran operator na vektorskem prostoru V s skalarnim produktom $\langle \cdot|\cdot \rangle$. Dokaži, da je s predpisom $\langle\langle u|v \rangle\rangle = \langle \mathcal{A}u|v \rangle$, $u, v \in V$ definiran skalarni produkt na V.

S4. Naj bosta $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ in

$$\langle (x_1, x_2) \,|\, (y_1, y_2) \rangle = a x_1 y_1 - x_1 y_2 + b x_2 y_1 + 2 x_2 y_2,$$

kjer sta a in b realni konstanti. Kateremu pogoju morata zadoščati a in b, da bo $\langle \cdot|\cdot \rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

S5. Dokaži, da je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{bmatrix}$$

pozitivna hermitska matrika in izračunaj njen pozitivni kvadratni koren.

Samostojno reši: [1, Naloge: 684, 687, 732], [2, Naloge: 362, 375, 386] in [3, Naloge: 346, 347, 349].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ linearna operatorja na unitarnem prostoru. Dokaži naslednji trditvi:

   (a) Zaloga vrednosti operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ je enaka zalogi vrednosti operatorja $\mathcal{A}^*$.

   (b) Jedro operatorja $\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mathcal{B}^*\mathcal{B}$ je enako preseku jeder operatorjev $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$.

2. Poišči matriko zrcaljenja čez podprostor

$$V = \{(x, y, z, w)\,|4x - y - z = 0, y - z + 4w = 0\}$$

v standardni bazi evklidskega prostora $\mathbb{R}^4$.

3. V evklidskem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$ sta podana hiperravnina in premica

$$\pi = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = 0\right\},\ p = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 2y = -z = 2t\right\}.$$

Naj bo $\mathcal{P} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ projektor na premico $p = \operatorname{Im} \mathcal{P}$ vzdolž hiperravnine $\pi = \operatorname{Ker} \mathcal{P}$.

   (a) Določi bazi danih podprostorov.
   (b) Poišči matriki, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ pripadata preslikavama $\mathcal{P}$ in $\mathcal{P}^*$.
   (c) Ali je $\mathcal{P}^*$ projektor? Če je, kam in vzdolž česa projecira?

4. Za matriko

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

poišči tako matriko P, da bo $P^T A P$ diagonalna matrika.

Priloga: preglednica posebnih endomorfizmov iz [2].

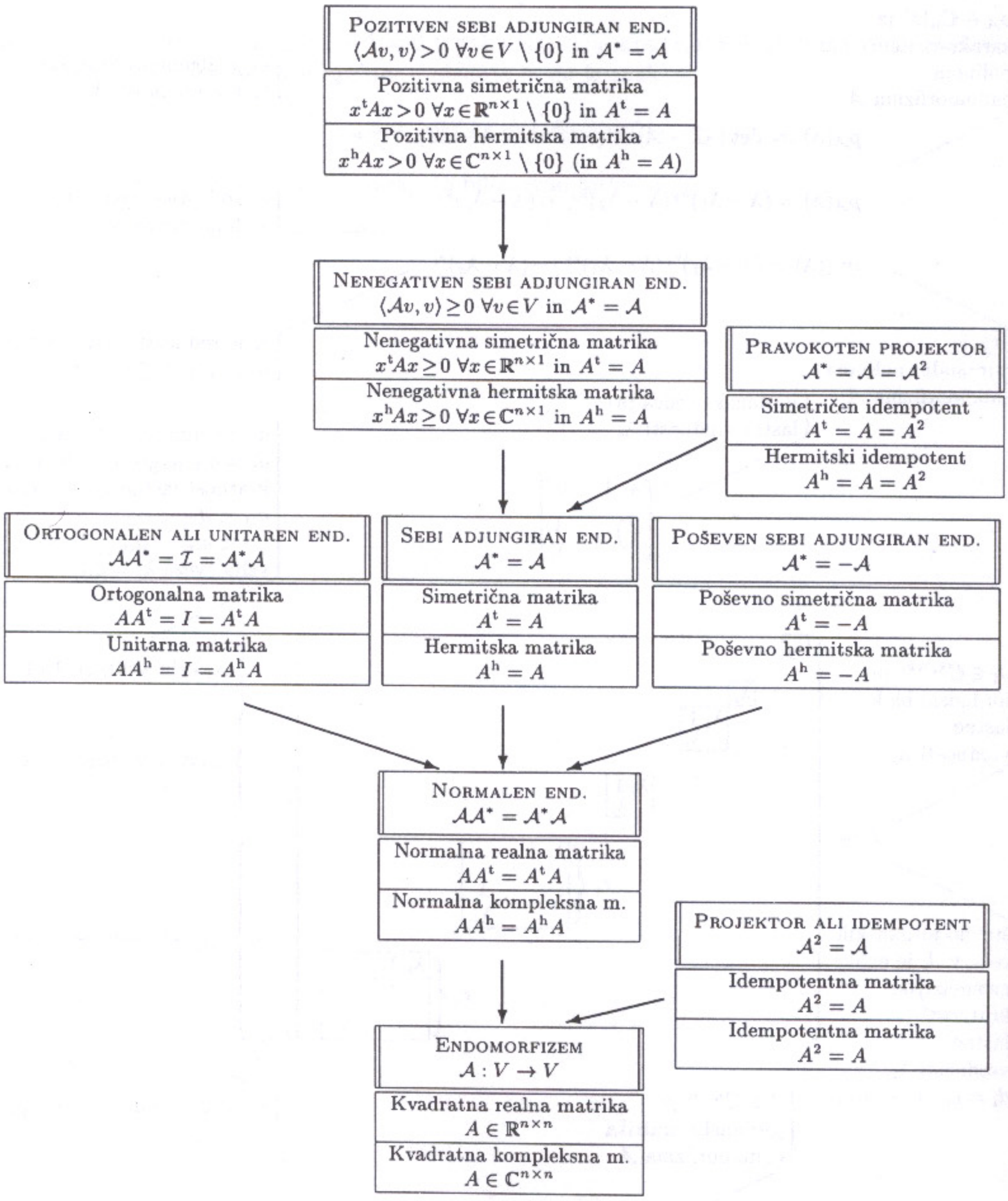
Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.

Preglednica posebnih endomorfizmov



Slika 1: Preglednica posebnih endomorfizmov