Vaje 15: Invariantni podprostori in Jordanova kanonična forma

Naloge na vajah:

1. Poišči vse invariantne podprostore pravokotne projekcije $\mathcal{P}$ prostora $\mathbb{R}^3$ na ravnino $z = 0$.

2. Dokaži, da sta vsota in presek invariantnih podprostorov endomorfizma $\mathcal{A}$ invariantna podprostora.

3. Poišči vse invariantne podprostore odvajanja v prostoru realnih polinomov $\mathbb{R}[X]$.

4. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem vektorskega prostora V nad $\mathbb{F}$. Dokaži, da so naslednji prostori invariantni za $\mathcal{A}$:

   (a) $V_n = \ker \mathcal{A}^n$, kjer je $n \in \mathbb{N}$,

   (b) $W_n = \ker (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^n$, kjer sta $\lambda \in \mathbb{F}$ in $n \in \mathbb{N}$,

   ter, da pri tem velja: $V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots$ in $W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots$.

5. Poišči korenske podprostore operatorja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   in s pomočjo njih poišči Jordanovo kanonično obliko matrike A, matriko prehoda P ter določi minimalni polinom.

6. Določi Jordanovo kanonično obliko matrike
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$
   matriko prehoda ter določi minimalni polinom.

7. Določi vse $a \in \mathbb{C}$, pri katerih ima kompleksna matrika
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   vsaj eno lastno vrednost enako 0. Za dobljene $a \in \mathbb{C}$ poišči minimalni polinom matrike A, Jordanovo matriko J_A in matriko prehoda P.

8. Napiši Jordanovo kanonično formo, minimalni in karakteristični polinom za endomorfizem $\mathcal{T}$, ki premore lastni vrednosti 1 in -1 ter zadošča: $\dim\ker(\mathcal{T}+\mathcal{I}) = 3$, $\dim\ker(\mathcal{T}+\mathcal{I})^2 = 5$, $\dim\ker(\mathcal{T}+\mathcal{I})^3 = \dim\ker(\mathcal{T}+\mathcal{I})^4 = 6$, $\dim\ker(\mathcal{T}-\mathcal{I}) = 3$ in $\dim\ker(\mathcal{T}-\mathcal{I})^2 = \dim\ker(\mathcal{T}-\mathcal{I})^3 = 4$.

9. Karakteristični polinom endomorfizma $\mathcal{A}$ je $p_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-3)^4(\lambda+2)^5(\lambda+1)$, njegov minimalni polinom pa je $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda+2)^3(\lambda+1)$. Napiši vse možne jordanske matrike endomorfizma $\mathcal{A}$ do podobnosti natančno.

10. Karakteristični polinom endomorfizma $\mathcal{A}$ je $p_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-1)^5(\lambda+2)^4(\lambda-3)^2$, njegov minimalni polinom pa $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)^2(\lambda-3)$. Geometrijska večkratnost lastne vrednosti 1 je 3. Določi vse možne Jordanove kanonične forme endomorfizma $\mathcal{A}$.

11. Naj ima matrika A Jordanovo obliko J_A. Kakšno Jordanovo obliko ima matrika $A+\lambda I$, kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$?

12. Naj ima matrika A Jordanovo obliko J_A in predpostavimo, da so vse njene lastne vrednosti različne od 0. Določi $J_{A^{-1}}$ in J_{A^2}!

13. Poišči Jordanovo kanonično obliko matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

in s pomočjo nje izračunaj A^n, e^A in $\sin A$.

14. Poišči vse rešitve matrične enačbe

$$X^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Samostojno reši: [1, Naloge: 603, 606 (5), 609], [2, Naloge: 258, 412, 423,] in [3, Naloge: 292, 299, 321].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem in $\mathcal{P}$ projektor vektorskega prostora V. Dokaži:

   (a) Podprostor $\operatorname{im}\mathcal{P}$ je invarianten za operator $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je $\mathcal{PAP} = \mathcal{AP}$.

   (b) Podprostora $\operatorname{im}\mathcal{P}$ in $\ker\mathcal{P}$ sta oba invariantna za operator $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko velja $\mathcal{PA} = \mathcal{AP}$.

2. Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Izračunaj karakteristični polinom, določi lastne vrednosti in lastne vektorje matrike A.

(b) Zapiši Jordanovo kanonično obliko matrike A in določi minimalni polinom matrike A.

3. Endomorfizmu $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^{11}$ v standardni bazi pripada matrika A. Določi vse možne Jordanove forme J_A matrike A, če velja

$$\det A = 1,\ \dim\ker\left(\mathcal{A}-\mathcal{I}\right)^2 = 5,\ \dim\ker\left(\mathcal{A}+\mathcal{I}\right)^3 = 5.$$

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.