Vaje 9: Inverzna matrika

Naloge na vajah:

1. Dani sta matriki:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Izračunaj A^{-1} z uporabo formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widetilde{A}^T$.

   (b) Izračunaj B^{-1} z uporabo linearnega sistema $[B|I] = [I|B^{-1}]$.

2. Reši matrični enačbi:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$,

   (b) $2AX - 3A = BX$, če sta $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -4 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Naj bo $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dokaži, da je $\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$.

4. Naj bo A poševno simetrična realna matrika velikosti $n \times n$, kjer je n liho število. Ali je matrika A obrnljiva?

5. Pravimo, da sta matriki A in B podobni, če obstaja taka obrnljiva matrika P, da velja $B = P^{-1}AP$. Dokaži, da imata podobni matriki enako determinanto.

6. Naj bo

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{bmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

   realni vektorski podprostor prostora $M_2(\mathbb{C})$.

   (a) Zapiši primer baze podprostora $\mathbb{H}$!

   (b) Preveri, da je podprostor $\mathbb{H}$ zaprt za matrično množenje.

   (c) Dokaži, da za vsak $0 \neq A \in \mathbb{H}$ obstaja A^{-1}. Inverz tudi izračunaj!

Samostojno reši: [1, Naloge: 391, 410(b), 421], [2, Naloge: 152, 155(a), 239] in [3, Naloge: 190, 191, 192].

Primera izpitnih nalog:

1. Reši matrično enačbo $A^T XB = A + \left(X^T A\right)^T$, kjer je

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   Glede na parameter a določi rang matrike X. Kaj lahko poveš o obrnljivosti matrike X?

2. Reši matrično enačbo $A^{-1}XA^2 = A^{-1}CA - 2A^{-1}XA$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.