Vaje 12: Linearna preslikava in matrika

Naloge na vajah:

1. Linearna preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ je podana s predpisom

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p(1) & p'(1) \\ p'(1) & p(-1) \end{bmatrix}.$$

   Zapiši matriko A, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}_3[X]$ in $M_2(\mathbb{R})$.

2. Določi kako bazo zaloge vrednosti in bazo jedra linearne preslikave $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, ki ji v standardni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ pripada matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Naj bosta $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ in $\mathcal{B}' = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$ urejeni bazi vektorskega prostora polinomov $\mathbb{R}_2[X]$.

   (a) Zapiši matriko prehoda iz baze $\mathcal{B}$ v bazo $\mathcal{B}'$.

   (b) Izrazi polinom $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$ kot linearno kombinacijo polinomov iz $\mathcal{B}'$.

   (c) Zapiši matriko odvajanja v $\mathbb{R}_2[X]$ za urejeno bazo $\mathcal{B}'$.

4. Naj bo $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (1, 1, 4), (0, 1, 3)\}$ urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$. Zapiši matriko zasuka prostora $\mathbb{R}^3$ za kot $\frac{\pi}{3}$ v pozitivni smeri okoli osi y v bazi $\mathcal{B}$.

5. Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pripada glede na urejeno bazo $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $\{(1, 2), (1, 0)\}$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Poišči podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$, zapiši njuni bazi.

   (b) Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v standardnih bazah prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^2$?

6. Naj bo V vektorski prostor dimenzije n in endomorfizem $\mathcal{P}$ projektor, kjer je dimenzija $\ker \mathcal{P}$ enaka $0 \leq m \leq n$. Dokaži, da obstaja taka baza $\mathcal{B}$ prostora V, v kateri projektorju $\mathcal{P}$ pripada matrika, ki ima po diagonali $n - m$ enic, povsod drugod pa ničle.

Samostojno reši: [1, Naloge: 436, 451, 454], [2, Naloge: 190, 197, 200] in [3, Naloge: 120, 135, 139].

Primeri izpitnih nalog:

1. Dana je preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathcal{A}(x, y, z, w) = (2x + y - w, x + y + z, 4x + 2y - 2w).$$

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava in določi matriko A, ki pripada tej linearni preslikavi glede na običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$.

   (b) Poišči poljubno bazo Σ jedra preslikave $\mathcal{A}$ ter poljubno bazo Π zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Koliko je $\dim \operatorname{im} \mathcal{A}$ in $\dim \ker \mathcal{A}$?

   (c) Dopolni Σ do urejene baze Σ' prostora $\mathbb{R}^4$ in Π do urejene baze Π' prostora $\mathbb{R}^3$. Kakšna matrika pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ glede na urejeni bazi Σ' in Π'?

2. Endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora $\mathbb{R}_4[X]$ je podan s predpisom: $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(1 + x) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{A}(x + x^2) = -2x + 2x^2$, $\mathcal{A}(x^2 + x^3) = -x + x^2 - x^3 + x^4$ in $\mathcal{A}(x^3 + x^4) = -2x^3 + 2x^4$.

   (a) Poišči matriko A, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_4[X]$.

   (b) Določi podprostore $\ker \mathcal{A}$, $\operatorname{im} \mathcal{A}$, $\ker \mathcal{A} \cap \operatorname{im} \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}^2$.

3. Na vektorskem prostoru $\mathbb{R}_n[X]$ realnih polinomov stopnje največ $n \in \mathbb{N}$ je s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) = (x + 1)\, p'(x)$$

   definirana preslikava $\mathcal{A} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.

   (a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearni operator.

   (b) Zapiši matriko, ki v standardni bazi prostora $\mathbb{R}_n[X]$ pripada operatorju $\mathcal{A}$.

   (c) Določi podprostora $\ker \mathcal{A}$ in $\operatorname{im} \mathcal{A}$. Koliko je njuna razsežnost?

   (d) Ali obstaja baza, v kateri operatorju $\mathcal{A}$ pripada diagonalna matrika? Če obstaja, zapiši to bazo in pripadajočo diagonalno matriko.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.