Vaje 11: Prostor linearnih preslikav

Naloge na vajah:

1. Definiramo linearne preslikave:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[X] & \mathcal{A}:(x,y,z)\mapsto(x-y)\,1+zX+(z-y)\,X^2 \\ \mathcal{B}:\mathbb{R}_2[X]\to\mathbb{R}^3 & \mathcal{B}:a_0 1+a_1X+a_2X^2\mapsto(a_2,a_0,a_1-a_0) \\ \mathcal{C}:\mathbb{R}_2[X]\to M_2(\mathbb{R}) & \mathcal{C}:a_0 1+a_1X+a_2X^2\mapsto\begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_2 & a_2\end{bmatrix}\end{array}$$

   Katere od sestavljenih preslikav $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{AB}$, $\mathcal{AC}$, $\mathcal{BA}$, $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{CA}$, $\mathcal{CB}$, $\mathcal{C}^2$ obstajajo? Za vsako tako zapiši predpis, po katerem slika.

2. Linearne preslikave $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ so podane s predpisi:

$$\mathcal{A}(x,y,z)=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix},\ \mathcal{B}(x,y,z)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix}$$
$$\mathcal{C}(x,y,z)=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix}.$$

   Določi predpis za linearno preslikavo $2\mathcal{A}-\mathcal{B}+\mathcal{C}$. Predpis zapiši v matrični obliki! Ali so $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ linearno neodvisni vektorji v vektorskem prostoru linearnih preslikav $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$?

3. Med naslednjimi realnimi vektorskimi prostori $\mathbb{R}^6$, $\mathbb{R}_3[X]$, $M_2(\mathbb{R})$, $T_3(\mathbb{R})$, $M_{2\times4}(\mathbb{R})$, $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}_2[X]$, $M_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X],\mathbb{R}^2)$ poišči vse izomorfne pare.

4. Naj bodo U,V in W končnorazsežni vektorski prostori nad $\mathbb{F}$ ter $\mathcal{A},\mathcal{B}:U\to V$ in $\mathcal{C}:V\to W$ linearne preslikave. Dokaži

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}+\mathcal{B})\le\operatorname{rang}\mathcal{A}+\operatorname{rang}\mathcal{B}\quad\text{in}\quad\operatorname{rang}(\mathcal{CA})\le\min\{\operatorname{rang}\mathcal{A},\operatorname{rang}\mathcal{C}\}.$$

5. Dokaži, da je endomorfizem $\mathcal{T}:V\to V$ nilpotent reda 2 (t.p. $\mathcal{T}^2=0$) natanko tedaj, ko je $\operatorname{Im}\mathcal{T}\subseteq\operatorname{Ker}\mathcal{T}$.

6. Naj bo $\mathcal{A}:V\to V$ endomorfizem ranga 1, to pomeni $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}=1$. Dokaži, da obstaja tak element $c\in\mathbb{F}$, da je $\mathcal{A}^2=c\mathcal{A}$.

7. Naj bo endomorfizem $\mathcal{P}:V\to V$ projektor, t.p. $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}$.

   (a) Dokaži, da za vsak vektor $x\in V$ velja relacija $\mathcal{P}(x)=x$ natanko tedaj, ko je $x\in\operatorname{Im}\mathcal{P}$ in velja relacija $\mathcal{P}(x)=0$ natanko tedaj, ko je $x\in\operatorname{Ker}\mathcal{P}$.

   (b) Dokaži, da velja $\operatorname{Ker}\mathcal{P}\oplus\operatorname{Im}\mathcal{P}=V$.

   (c) Kaj lahko poveš o operatorju $\mathcal{Q}=\mathcal{I}-\mathcal{P}$? Določi $\operatorname{Im}\mathcal{Q}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{Q}$!

Samostojno reši: [1, Naloge: 291, 294, 295], [2, Naloge: 101, 109, 111] in [3, Naloge: 165, 168, 169].

Primeri izpitnih nalog:

1. (a) Naj bosta $\mathcal{A} : U \to V$ in $\mathcal{B} : V \to W$ linearni preslikavi. Dokaži, da za preslikavo $\mathcal{BA} : U \to W$ velja relacija

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{BA} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} + \dim \left(\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}\right).$$

   (b) Linearni preslikavi $\mathcal{A} : \mathbb{R}_3[X] \to M_2(\mathbb{R})$ in $\mathcal{B} : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sta podani s predpisom:

$$\mathcal{A}(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p''(0) \\ p''(0) & p'(0) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(A) = \operatorname{Sled}(A).$$

   Določi razsežnost in baze podprostorov $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{B}$ in $\operatorname{Ker} \mathcal{BA}$.

2. Dokaži, da so za vektorski prostor V naslednje trditve ekvivalentne:

   (a) $\dim V \geq 2$.

   (b) Obstajata neničelna vektorska podprostora U in W, da velja $V = U \oplus W$.

   (c) Obstaja neničelni projektor $\mathcal{P} : V \to V$, katerega $\operatorname{Ker} \mathcal{P} \neq 0$.

3. Naj bo V vektoski prostor z $\dim V = 3$ in $\mathcal{A} : V \to V$ endomorfizem, za katerega velja $\mathcal{A}^2 = 0$. Dokaži, da velja:

   (a) Endomorfizem $\mathcal{A}$ ni obrnljiv.

   (b) $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

   (c) $\operatorname{Im} \mathcal{A} \cap \operatorname{Ker} \mathcal{A} \neq 0$.

   (d) $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = 1$.

4. Naj bo V vektorski prostor in $\mathcal{A} : V \to V$ endomorfizem, za katerega velja $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \cap \operatorname{Im} \mathcal{A} = 0$. Dokaži, da je potem $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^n = \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Obravnavaj najprej primer $n = 2$.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.