Vaje 16: Skalarni produkt

Naloge na vajah:

1. Kakšnemu pogoju zadoščajo števila a_i za $i = 1, 2, ..., n$, da bo s predpisom $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i$ definiran skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$?

2. Naj bo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ vektorski prostor zveznih realnih funkcij, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ prostor realnih polinomov, $\mathcal{C}([0,1])$ prostor zveznih funkcij na intervalu $[0,1]$ in $u(x)$ pozitivna realna funkcija. Na katerih zgornjih prostorih je s predpisom
$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 u(x) f(x) g(x)\, dx$$
definiran skalarni produkt?

3. Dokaži, da je s predpisom $\langle A|B\rangle = \text{sled}\left(A^T B\right)$ definiran skalarni produkt na vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$.

4. Poišči ortonormirano bazo podprostora V, ki ga generirajo vektorji $(1,1,0,0)$, $(0,1,2,0)$ in $(0,0,3,4)$ v prostoru $\mathbb{R}^4$ z običajnim skalarnim produktom.

5. Naj bo na $M_2(\mathbb{R})$ definiran skalarni produkt: $\langle A|B\rangle = \text{sled}\left(A^T B\right)$. Poišči ortonormirano bazo podprostora
$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+2b \\ 0 & -b \end{bmatrix} |a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Poišči ortonormirano bazo prostora $V^\perp$, kjer je V podprostor v $\mathbb{C}^4$ generiran z vektorjema $(0,1,i,0)$ in $(i,2,0,0)$. V $\mathbb{C}^4$ vzamemo običajni skalarni produkt.

7. Naj bosta U in V vektorska podprostora evklidskega prostora W. Dokaži:
$$(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp \quad \text{in} \quad (U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp.$$

8. V prostor polinomov $\mathbb{R}_2[X]$ vpeljemo tak skalarni produkt, da je množica $\{1, x-1, 1-x^2\}$ ortonormirana.
   (a) Poišči predpis za skalarni produkt.
   (b) Poišči kot med vektorjema x in x^2 ter določi pravokotno projekcijo vektorja x^2 na vektor $1+x^2$.

9. Vektorju $x = (2, 3, -4, 0)$ določi ortogonalno projekcijo ter razdaljo do te projekcije na podprostor v evklidskem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^4$, ki ga razpenjata vektorja $a = (1, -1, 1, 1)$ in $b = (2, -1, -2, 3)$.

10. Naj bo V unitaren vektorski prostor in $v \in V$ ter $A : V \to V$ endomorfizem.
    (a) Dokaži, da je $v = 0$ natanko tedaj, ko je $\langle v|w\rangle = 0$ za vsak $w \in V$.

(b) Dokaži, da je $A = 0$ natanko tedaj, ko je $\langle Aw | w \rangle = 0$ za vsak $w \in V$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 633, 642, 645], [2, Naloge: 307, 316, 322] in [3, Naloge: 327, 330, 334].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bo U vektorski podprostor $\mathbb{R}_4[X]$ realnih polinomov stopnje največ 4, ki vsebuje vse polinome, za katere velja $p(1) = 0$ in $p(x) = p(-x)$. Naj bo $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ ortonormirana baza $\mathbb{R}_4[X]$. Poišči ortonormirano bazo podprostorov U in $U^\perp$.

2. V $\mathbb{R}_3[X]$ uvedemo skalarni produkt tako, da je množica $\{1, 1-x, 1-x^2, 1-x^3\}$ ortonormirana baza. Naj bo $V = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, p(1) = p(-1)\}$. Poišči ortonormirani bazi podprostorov V in $V^\perp$ ter izračunaj pravokotno projekcijo polinoma $1 + x^2 + x^3$ na podprostor V.

3. V $\mathbb{R}^3$ vpeljemo skalarni produkt tako, da je množica $\{(1,0,0), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$ ortonormirana baza. Poišči kot med vektorjema $u_1 = (0,1,0)$ in $u_2 = (0,0,1)$ in pravokotno projekcijo vektorja u_1 na vektor $u_3 = (1,0,1)$.

4. Naj bo $V = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A^T = A\right\}$ vektorski prostor simetričnih realnih $n \times n$ matrik. Definirajmo preslikavo $\langle . | . \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\langle A | B \rangle = \text{sled}(AB)$$

za vsak $A, B \in V$.

(a) Dokaži, da je $\langle . | . \rangle$ skalarni produkt na V.

(b) Za primer $n = 2$ poišči ortonormirano bazo prostora V.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.