Vaje 2: Skalarni, vektorski in mešani produkt

Naloge na vajah:

1. Izračunaj dolžino vektorjev $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, njun skalarni produkt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ in kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

2. Kolikšen kot tvori telesna diagonala kocke z osnovno ploskvijo kocke in kolikšen z osnovno stranico kocke.

3. Dokaži, da je paralerogram romb natanko tedaj, ko se njegovi diagonali sekata pod pravim kotom.

4. Naj za vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ velja $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Izračunaj $\vec{a}\,\vec{b} + \vec{b}\,\vec{c} + \vec{c}\,\vec{a}$.

5. Izračunaj $(((\vec{i} \times \vec{k}) \times \vec{i}) \times \vec{i}) \times \vec{k}$.

6. Paralerogram določata diagonali $\vec{e} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ in $\vec{f} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Izračunaj ploščino paralerograma.

7. Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ paroma nekolinearni vektorji. Dokaži, da je $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ natanko tedaj, ko velja $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

8. Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna vektorja. Reši vektorsko enačbo
$$(\vec{a} \cdot \vec{x})(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{x}.$$

9. Izračunaj volumen
   (a) paralelepipeda, ki ga določajo vektorji $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (-1,2,0)$ in $\vec{c} = (0,1,1)$;
   (b) tristrane piramide, ki jo določajo točke $A(1,1,2)$, $B(1,2,1)$, $C(1,0,0)$ in $D(-3,1,1)$.

   Volumna izrazi z ustreznim mešanim produktom!

10. Naj bo $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 1$. Izračunaj $\left[2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}, 3\vec{c} + 4\vec{a}\right]$.

11. Dokaži Lagrangeovo identiteto: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 44, 51, 83], [2, Naloge: 7, 8 , 9] in [3, Naloge: 6, 9, 15].

Primeri izpitnih nalog:

1. Na vsako od stranskih ploskev tristrane piramide, določene z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$, postavi pravokotni vektor, ki ima smer iz telesa in ima dolžino enako ploščini ustrezne stranske ploskve. Izračunaj vsoto teh vektorjev in absolutno vrednost mešanega produkta treh od teh vektorjev, izrazi jo z volumnom tristrane piramide.

2. Naj bosta $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ linearno neodvisna geometrijska vektorja. Ugotovi, kdaj je rešljiva vektorska enačba

$$(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{a})(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{a}$$

in jo reši.

3. Dana sta vektorja $\vec{x} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$ in $\vec{y} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$. Določi vektor $\vec{z}$, da bo pravokoten na vektor $\vec{y}$, da bo njegova dolžina $2\sqrt{11}$, in da bo volumen paralelepipeda, ki ga oklepajo vektorji $\vec{x}, \vec{y}$ in $\vec{z}$, enak 12. Koliko rešitev dobiš?

4. Naj bodo $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ paroma pravokotni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami $|\overrightarrow{a}| = 2$, $\left|\overrightarrow{b}\right| = 1$ in $|\overrightarrow{c}| = 3$. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\,, \quad \overrightarrow{q} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}\,, \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}\,.$$

5. Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ geometrijski vektorji. Izračunaj prostornino tristrane piramide, ki jo določajo vektorji $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ in $\vec{c} \times \vec{a}$; prostornino izrazi z mešanim produktom $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$.

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.