Vaje 5: Vektorski prostor, podprostor in baza

Naloge na vajah:

1. Množica realnih n-teric $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \, | a_i \in \mathbb{R}\}$ je realni vektorski prostor za običajni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem po komponentah:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n) \quad \text{in}$$
$$\lambda \, (a_1, a_2, ..., a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n)$$

kjer so $\lambda, a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

   (a) Katere od naslednjih podmnožic prostora $\mathbb{R}^n$ so vektorski podprostori?

$$\begin{array}{ll} U = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 = 0\} & W = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0\} \\ V = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 \geq 0\} & Z = \{a \in \mathbb{R}^n | a_1 = a_3 = a_5 = \cdots\} \end{array}$$

   (b) V primerih, ko so dane množice vektorski prostori, določi njihovo dimenzijo in zapiši primer baze.

2. Poišči kako bazo vektorskega podprostora $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \, | x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_4 = 0\}$ v $\mathbb{R}^5$ in jo dopolni do baze celega vektorskega prostora $\mathbb{R}^5$.

3. Množica vseh realnih polinomov $\mathbb{R}\,[X] = \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n | n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, če je seštevanje in množenje s skalarjem definirano s predpisom:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i + \sum_{i=1}^{m} b_i x^i = \sum_{i=1}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) \, x^i \quad \left\{ \begin{array}{l} a_i = 0 \, \text{za} \; n < i \leq \max\{n, m\} \\ b_i = 0 \, \text{za} \; m < i \leq \max\{n, m\} \end{array} \right. ,$$
$$\lambda \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i \right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) \, x^i \, ,$$

kjer so $\lambda, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ in $n, m \in \mathbb{N}$. Ali je katera od podmnožic

$$U = \{p \in \mathbb{R}\,[X] \, | \, \mathrm{st}\,(p) \leq n\} \, , \; V = \{p \in \mathbb{R}\,[X] \, | \, \mathrm{st}\,(p) = n\} \; \text{in}$$
$$W = \{p \in \mathbb{R}\,[X] \, | p\,(1) = p\,(2)\} \, ,$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}\,[X]$?

4. Ali so naslednje množice:

$$A = \left\{1, x + 1, x^2 + x, x^3 + x^2, \ldots, x^n + x^{n-1}\right\} ,$$
$$B = \left\{1, 2x, 3x^2, \ldots, nx^{n-1}\right\} ,$$
$$C = \left\{1, x + 1, x^2 + 2x, x^2\right\} .$$

linearno neodvisne v vektorskem prostoru $\mathbb{R}\,[X]$? Določi še podprostore $\mathcal{L}\,(A)$, $\mathcal{L}\,(B)$ in $\mathcal{L}\,(C)$.

5. Dokaži, da je $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}[X]$.

6. Množica vseh zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, če je seštevanje in množenje s skalarjem definiramo s predpisom

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{in} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}$$

za vsaki $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Katere od podmnožic

$$\begin{array}{ll} U = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,|\, f(0) = 0\}\ , & W = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ je soda funkcija}\}\ , \\ V = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,|\, f(0) \geq 0\}\ , & Z = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,|\, f \text{ je polinomska funkcija}\} \end{array}$$

   so vektorski podprostori v $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

   (b) Ali sta $\left\{\sin^2 x, \frac{1}{4}\cos^2 x, 5\right\}$ in $\{xe^x, e^{2x}\}$ linearno neodvisni množici v vektorskem prostoru $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

7. Naj bo $M_2(\mathbb{C})$ množica kompleksih 2×2 matrik.

   (a) Poišči kako bazo kompleksnega vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$. Koliko je dimenzija tega prostora?

   (b) Poišči kako bazo realnega vektorskega prostora $M_2(\mathbb{C})$. Koliko je dimenzija tega prostora?

8. Dokaži, da sta naslednji podmnožici $n \times n$ realnih matrik

$$U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{sled}(A) = 0\}\ , \quad V = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, A^T = -A\right\}$$

vektorska podprostora realnega vektorskega prostora $M_n(\mathbb{R})$. V primeru, ko je $n = 3$, določi tudi bazi in razsežnost podprostorov U in V.

9. Množica realnih zaporedij $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_1, a_2, a_3, ...) \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ za običajni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem po komponentah:

$$\begin{gathered}(a_1, a_2, a_3, ...) + (b_1, b_2, b_3, ...) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ...) \quad \text{in} \\ \lambda(a_1, a_2, a_3, ...) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, ...)\end{gathered}$$

kjer so $\lambda, a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

   (a) Dokaži, da sta

$$U = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | a_{n+2} = 2a_n\right\}\ , \quad V = \left\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$$

   vektorska podprostora v $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

   (b) Poišči razsežnost podprostora U.

Samostojno reši: [1, Naloge: 204, 210, 237], [2, Naloge: 59, 63, 169] in [3, Naloge: 49, 55, 58].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bosta $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Določi matriko C tako, da bo množica
$$U = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}); AXB^T = C\right\}$$
vektorski podprostor v $M_n(\mathbb{R})$. Določi še bazo in razsežnost prostora U v primeru, ko je $n = 3$ in
$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. V vektorskem prostoru $M_n(\mathbb{R})$ realnih $n \times n$ matrik je dana podmnožica $V = \left\{X \in M_n(\mathbb{R}) | AX - XA^T = 0\right\}$, kjer je $A \in M_n(\mathbb{R})$ fiksna matrika.
   (a) Dokaži, da je V realni vektorski podprostor prostora $M_n(\mathbb{R})$.
   (b) V primeru, ko je $n = 3$ in $A = E_{12} + E_{23}$ določi razsežnost in zapiši kakšno bazo podprostora V.

3. V prostoru $\mathbb{R}_4[X]$ realnih polinomov stopnje največ 4 je dana množica:
$$U = \{p \in \mathbb{R}_4[X]; p(1) = p'(0) = 0\}.$$
   (a) Dokaži, da je U vektorski podprostor in določi njegovo bazo in razsežnost.
   (b) Za vsako od množic A, B, C in D ugotovi ali je ogrodje ali je baza prostora U
$$\begin{aligned} A &= \left\{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^3 - x^2\right\}, \\ B &= \left\{x^4 + x^3, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\right\}, \\ C &= \left\{x^4 + x^3 - 2, x^4 + x^2 - 2, x^2 - 1\right\}, \\ D &= \left\{x^4 + x^3 - 2, 2x^4 + x^3 - 3, x^4 + x^3 + x^2 - 3, x^2 - 1\right\}. \end{aligned}$$

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.