Vaje 6: Vsota in presek vektorskih prostorov

Naloge na vajah:

1. Naj bosta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}^4$ določena kot
$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \ , \\ V &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,|x_1 + x_2 = 0, \ x_3 - 2x_4 = 0\} \ . \end{aligned}$$
Določi vektorske podprostore $U, V, U \cap V$ in $U + V$. Določi razsežnost in zapiši primere njihovih baz!

2. Naj bo $V = U \oplus W$ in naj bo Z tak vektorski podprostor, da je $U \leq Z \leq V$. Dokaži, da je potem $Z = U \oplus (Z \cap W)$.

3. Naj bo $M_n(\mathbb{R})$ vektorski prostor $n \times n$ realnih matrik. Dokaži, da je $M_n(\mathbb{R}) = U \oplus V$, kjer je U vektorski podprostor vseh simetričnih matrik, V pa vektorski podprostor vseh poševno simetričnih matrik.

4. Naj bo $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ vektorski prostor zveznih realnih funkcij, U vektorski podprostor vseh sodih funkcij in V vektorski podprostor vseh lihih funkcij. Dokaži, da je $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = U \oplus V$.

5. Naj bosta $V = \{p \in \mathbb{R}[X] \,|p(1) = 0\}$ in $U = \{p \in \mathbb{R}[X] \,|p(2) = 0\}$ podprostora vektorskega prostora realnih polinomov $\mathbb{R}[X]$. Določi podprostora $V \cap U$ in $V + U$ ter vsakemu podprostoru $U, V, V \cap U$ in $V + U$ določi bazo.

6. V vektorskem prostoru $M_2(\mathbb{R})$ sta dana podprostora
$$\begin{aligned} V &= \{X \in M_2(\mathbb{R}) \,|E_{12}X = 0\} \,, \\ U &= \mathcal{L}(E_{11} - E_{21}, E_{11} + E_{22}, E_{21} - E_{22}, E_{11} + E_{21} + E_{22}) \,. \end{aligned}$$
Poišči baze podprostorov $U, V, V \cap U$ in $V + U$.

Samostojno reši: [1, Naloge: 239, 250, 254], [2, Naloge: 82, 83, 85] in [3, Naloge: 63, 66, 67].

Primeri izpitnih nalog:

1. Naj bosta $U = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \,| \int_{-1}^{1} p(x)\,dx = 0\}$ in $V = \{p \in \mathbb{R}_3[X] \,|p'(1) = 0\}$ vektorska podprostora $\mathbb{R}_3[X]$. Določi razsežnost in zapiši primere baz vektorskih podprostorov $U, V, U \cap V$ in $U + V$.

2. Za matriko $A \in M_3(\mathbb{R})$ označimo z A^S matriko, ki je prezrcaljena čez stransko diagonalo. Naj bosta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podmnožici $M_3(\mathbb{R})$ oblike
$$\mathcal{S} = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|A = A^S\right\} \quad \text{in} \quad \mathcal{T} = \left\{A \in M_3(\mathbb{R}) \,|A^T = A^S\right\} \ .$$
Dokaži, da sta $\mathcal{S}$ in $\mathcal{T}$ podprostora vektorskega prostora $M_3(\mathbb{R})$, določi tudi baze prostorov $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ in $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Koliko je dimenzija prostora $\mathcal{S} + \mathcal{T}$?

3. Dani sta matriki
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Naj bo U množica vseh matrik, ki komutirajo z matrikama A in B ter V množica tistih matrik, ki komutirajo vsaj z eno od A in B.

   (a) Dokaži, da je U vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$ in zapiši njegovo bazo.

   (b) Dokaži, da je V ni vektorski podprostor. Določi najmanjši vektorski podprostor v $M_2(\mathbb{R})$, ki vsebuje V. Zapiši tudi njegovo bazo!

Literatura

[1] M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna: Naloge iz algebre I, DMFA, Ljubljana 1992.

[2] M. Kolar, B. Zgrablić: Več kot nobena a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre, Pitagora, Ljubljana 1996.

[3] B. Zgrablić: Algebrski drobiž, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 2002.