Analiza kvalitete regulacijskih sistemov

Obravnavani časovni odzivi so zapleteni, zato vedenje regulacijskega sistema opišemo s pokazatelji kvalitete, ki so odvisni od lege polov.

Pokazatelji učinkovitosti delovanja regulacijskega sistema

Načrtovanje regulatorja je postopek, s pomočjo katerega dosežemo želene pokazatelje kvalitete. Običajno želimo doseči faktor dušenja ζ med 0,4 in 0,8.

Čas zakasnitve - t_d je čas, v katerem regulirana veličina prvič doseže 50% končne vrednosti.

Čas vzpona - t_r

Začetek odziva sistema določa čas vzpona t_r (rise time). Za sisteme z dušenjem $\zeta < 1$ je **čas vzpona t_r** določen s spremembo od 0 do1, pri sistemih z dušenjem $\zeta > 1$ pa s spremembo izhoda od 10% do 90% njegove vrednosti in ga označimo s t_{r1}.

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}; \quad \beta = arctg\frac{\omega_d}{\sigma} = arctg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}; \qquad t_r \approx \frac{2}{\omega_n} \quad pri\ \zeta < 0.5$$

$$t_{r1} \approx \frac{2.16\zeta + 0.60}{\omega_n}$$

Čas prvega prenihaja - t_p

(čas maksimalnega prevzpona – peak time) določimo za sistem drugega reda:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Prenihaj M_{pt}

je določen z razliko med maksimalno vrednostjo odziva in vrednostjo 1.

$$e_{d\%} = \frac{M_{pt} - M_s}{M_s}\cdot 100; \quad M_p = c(t_p) - 1 = e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad velja\ za \quad 0 \le \zeta < 1; \quad e_{d\%} = M_p(\%) = e^{-\zeta\frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\cdot 100\%$$

$$0 \le \zeta \le 0.6: \qquad M_p \approx 1 - \frac{\zeta}{0.6}$$

$$0.4 \le \zeta \le 0.9: \qquad M_p \approx 0.4\cdot\left(1 - \frac{\zeta}{0.9}\right)$$

Dušenje ζ	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3
Prenihaj M_p(%)	0.2	1.5	4.6	9.5	16.3	25.4	37.2

Čas umiritve/stabilizacije - t_s

je čas, ki ga potrebuje odziv, da doseže in ostane znotraj tolerančnega področja okoli ustaljene vrednosti x (x = običajno ± 2% oz. ± 5%).

$$e^{-\frac{t}{T}} = e^{-\zeta\omega_n t}; \quad e^{-\zeta\omega_n t_s} = \frac{x}{100} \quad \Rightarrow \quad t_s = \frac{\ln\frac{100}{x}}{\zeta\omega_n} \quad pri \quad \zeta \langle 1$$

$$x = 2\%: \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4T; \qquad x = 5\%: \quad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} = 3T$$

Čas ustaljenega stanja stanja je približno enak 3 do 4 – kratni vrednosti časovne konstante, ki pripada prevladujočemu korenu karakteristične enačbe sistema.

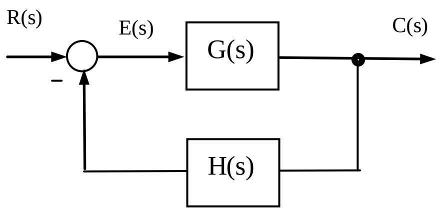
Pri načrtovanju običajno predpišemo pokazatelje, poiščemo ustrezno lego polov, ki zagotovi ustrezne pokazatelje kvalitete in določimo regulator, ki zagotovi želene pole. Za podane vrednosti t_r , M_p in t_s dobimo naslednje zveze:

$$\omega_n \geq \frac{2}{t_r}; \quad \zeta \geq 0.6 \cdot (1 - M_p); \quad \sigma = \zeta\omega_n \geq \frac{4}{t_s}$$

Neenačbe lahko predstavimo v ravnini 's', kjer je prikazano področje, kjer je potrebno izbrati pole.

Stacionarni pogrešek v regulacijskih sistemih

Glavna zahteva regulacijskega sistema je zagotovitev zahtevanega stacionarnega pogreška.



$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s) = \frac{1+G(s)H(s)-G(s)}{1+G(s)H(s)}R(s)$$

$$H(s)=1 \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

Stacionarni pogrešek, ko je H(s) = 1 določimo: $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = e_s = \lim\limits_{s\to 0} \dfrac{sR(s)}{1+G(s)}$

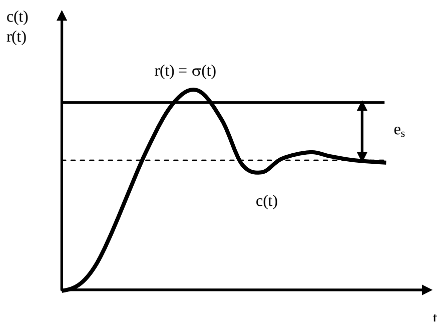
Odprtozančna funkcija v faktorizirani obliki: $G(s)H(s) = \dfrac{K(T_{b1}s+1)(T_{b2}s+1)\cdots(T_{bn}s+1)}{s^j(T_{a1}s+1)(T_{a2}s+1)\cdots(T_{am}s+1)}$

Parametri v prenosni funkciji:

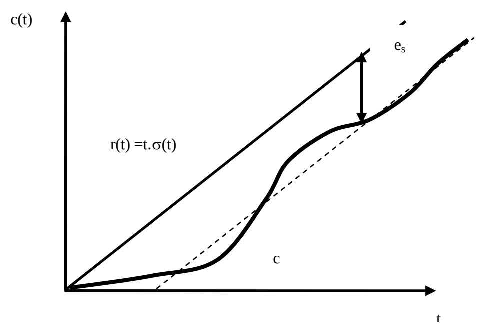
- K… ojačanje sistema,
- K_p … konstanta pozicijskega pogreška / odprto zančna prenosna funkcija
- T_{bi} … časovne konstante števca;
- T_{ai} … časovne konstante imenovalca
- j … vrsta sistema oz. število polov v koordinatnem izhodišču (celo število, ki predstavlja število integratorjev v odprto-zančni funkciji G(s)

Stacionarni pogrešek sistema določimo

- za referenčno stopnico: r(t) = σ(t)



- za referenčno naraščajočo funkcijo - rampo: r(t)=t.σ(t)



Stacionarni pogrešek v transformirani obliki pri stopničastem referenčnem signalu

$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) \quad \Rightarrow \quad e_s = \lim_{s\to 0} E(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s \cdot R(s)}{1+G(s)\cdot H(s)} = \frac{R_0}{1+\lim\limits_{s\to 0} G(s)\cdot H(s)}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)\cdot H(s) \quad \Rightarrow \quad e_s = \frac{R_0}{1+K_p}$$

Pri stopničastem referenčnem signalu je pogrešek odvisen od konstante pozicijskega pogreška. Za sistem ničelnega reda (j = 0, proporcionalni sistem) in višjih redov (j ≥ 1) velja:

$$j=0: K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_{b1}s+1)(T_{b2}s+1)\cdots(T_{bn}s+1)}{(T_{a1}s+1)(T_{a2}s+1)\cdots(T_{am}s+1)} = K; \quad j\geq 1: K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_{b1}s+1)(T_{b2}s+1)\cdots(T_{bn}s+1)}{s^j(T_{a1}s+1)(T_{a2}s+1)\cdots(T_{am}s+1)} = \infty$$

$$j=0: e_s = \frac{R_0}{1+K}; \quad j\geq 1: e_s = 0$$

	Vrsta vhodnega signala			Stopnica	Rampa	Parabola
Vrsta sistema (j)	K_p	K_v	K_a	$e_s=R_0/(1+K_p)$	$e_s=R_0 / K_v$	$e_s=R_0 / K_a$
0	K	0	0	$R_0/(1+K)$	∞	∞
1	∞	K	0	0	R_0/K	∞
2	∞	∞	K	0	0	R_0/K
3	∞	∞	∞	0	0	0

Stabilnost regulacijskih sistemov

Analiza stabilnosti linearnih časovno nespremenljivih sistemov temelji na legi polov regulacijskega sistema $G_r(s) = C(s)/R(s)$ oziroma na legi korenov karakteristične enačbe: $1 + G(s)H(s) = 0$. Sistem je stabilen, če je izhodni signal omejen pri kakršnemkoli omejenem vhodnem.

referenčni vhod:	$\lvert r(t)\rvert \le N < \infty$ za $t \ge t_0$	t … poljubni čas
regulirana veličina:	$\lvert c(t)\rvert \le M < \infty$ za $t \ge t_0$	t_0… začetek opazovanja

BIBO stabilnost vodi do zahteve, da koreni karakteristične enačbe v primeru stabilnega sistema ležijo v levem delu ravnine 's'.

Routh-ov stabilnostni kriterij

Postopek:

1. zapis karakteristične enačbe $1 + G(s)H(s) = 0$ v obliki: $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

2. če ležijo koreni v levem delu ravnine, morajo biti koeficienti a,b,c,… pozitivni oz. enakega predznaka (primer enačbe 1.reda: $s + a$; primer enačbe 2.reda: $s^2 + bs + c$; …)

3. ureditev koeficientov v Routh-ovo shemo po naslednjem vzorcu:

$$
\begin{array}{llllll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \ldots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \ldots \\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \ldots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \ldots \\
. & . & . & . & . & \\
. & . & . & . & . & \\
. & . & . & . & . & \\
s^3 & e_1 & e_2 & e_3 & & \\
s^2 & f_1 & f_2 & & & \\
s^1 & g_1 & & & & \\
s^0 & h_1 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1};\ b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1};\ b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1};\ldots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1};\ c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1};\ c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1};\ldots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1};\ d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1};\ldots$$

Primer:

Karakteristična enačba sistema ima obliko: $s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5 = 0$

Ker so vsi koeficienti pozitivni, je izpolnjen potreben pogoj za stabilnost sistema.

Izračunana Routh-ova shema ima obliko:

s^4	1	3	5	
s^3	2	4	0	/ x ½
	1	2	0	
s^2	1	5		
s^1	-3	0		
s^0	5			

Ker se predznak v prvem stolpcu dvakrat zamenja (prehod iz + v – in iz – v +), ni izpolnjen zadostni pogoj za stabilnost. Sistem ima dva pola v desnem delu ravnine 's'.