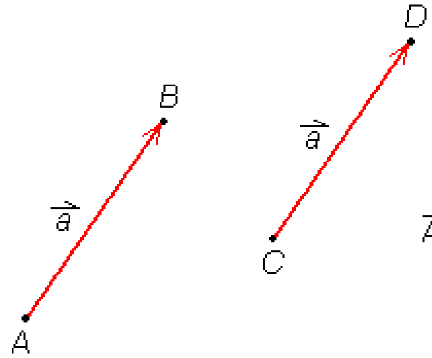
Vektorji

Usmerjena daljica (oziroma orientirana daljica) je daljica, ki ji priredimo usmeritev (orientacijo). To naredimo tako, da se odločimo, katero od krajišč je začetna točka in katero končna točka te daljice.
Usmerjeno daljico z začetno točko *A* in končno točko *B* označimo $\overrightarrow{AB}$.

Vektorji so matematične količine, ki jih ponazarjamo z usmerjenimi daljicami. Pri tem usmerjeni daljici $\overrightarrow{AB}$in $\overrightarrow{CD}$predstavljata isti vektor, če izpolnjujeta naslednje tri pogoje:
- sta enako dolgi,
- sta vzporedni,
- sta enako usmerjeni (enako orientirani).

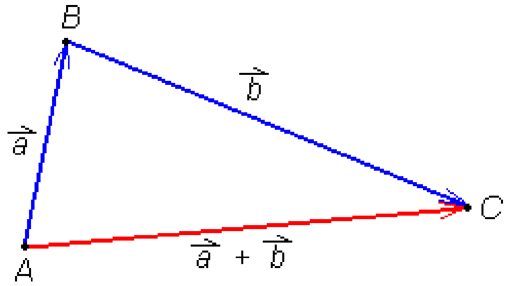


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{a}$

Dani vektor lahko ponazorimo z usmerjeno daljico, ki se začne v poljubni točki - pravimo tudi, da vektor vzporedno premaknemo v dano začetno točko.

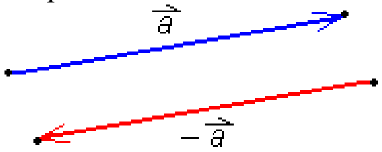
V množico vseh vektorjev dodamo kot poseben element še **vektor nič** (oznaka $\vec{0}$), ki ga ponazormimo s točko. To je edini vektor, ki ima dolžino enako 0 in nima določene smeri.
Seštevanje vektorjev
Vektorje seštevamo po pravilu: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

To pomeni, da vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ seštejemo tako, da ju najprej vzporedno premaknemo v takšno lego, da je končna točka prvega vektorja hkrati začetna točka drugega, nato pa narišemo **vsoto** $\vec{a}$ + $\vec{b}$, ki poteka od začetne točke prvega do končne točke drugega vektorja.



Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

Nasprotni vektor vektorja $\vec{a}$ je vektor, ki je enako dolg in vzporeden vektorju $\vec{a}$, ima pa nasprotno orientacijo (usmeritev).
Nasprotni vektor označimo $-\vec{a}$.



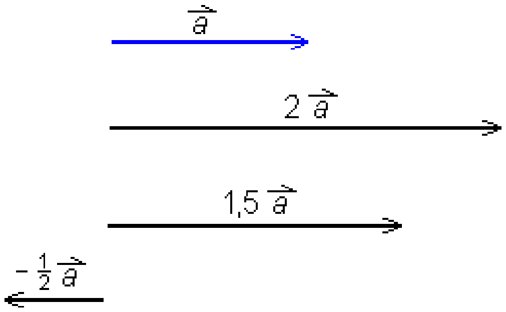
Za seštevanje vektorjev veljajo naslednji zakoni (primerjaj z zakoni za seštevanje števil):

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	komutativnostni zakon (za seštevanje)
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	asociativnostni zakon (za seštevanje)
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	zakon o nevtralnem elementu (za seštevanje)
$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$	zakon o inverznem (nasprotnem) elementu (za seštevanje)

Odštevanje vektorjev definiramo kot prištevanje nasprotnega vektorja, torej:
$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Množenje vektorja s številom
Pri množenju vektorja $\vec{a}$ z realnim številnom n, dobimo za rezultat vektor $n\vec{a}$, ki je določen z naslednjimi lastnostmi:
- vektor $n\vec{a}$ je vzporeden vektorju $\vec{a}$,
- dolžina vektorja $n\vec{a}$ je $|n|$-krat tolikšna kot dolžina vektorja $\vec{a}$,
- če je število n pozitivno, je vektor $n\vec{a}$ enako orientiran kot $\vec{a}$;
  če je število n negativno, pa je vektor $n\vec{a}$ orientiran nasprotno kot $\vec{a}$.

(Opomba: če je $n = 0$, je rezultat množenja vektor $\vec{0}$. Po dogovoru velja, da je ta vektor vzporeden s poljubnim drugim vektorjem.)



Lastnosti množenja vektorja s številom
Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ in za poljubni realni števili m in n velja:
$n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$
$(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

Linearne kombinacije in odvisnost

Linearna kombinacija vektorjev je vsak izraz, ki se ga da zapisati kot vsoto vektorjev pomnoženih s poljubnimi realnimi števili.

Zgledi linearnih kombinacij:

$2\vec{a}$, $1{,}5\vec{a} - 7\vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

Dani vektorji so med sabo **linearno odvisni**, če se da enega izmed njih zapisati kot linearno kombinacijo ostalih.

Če to ni mogoče, pravimo, da so dani vektorji **linearno neodvisni**.

- Dva vektorja sta linearno odvisna, če in samo če sta vzporedna. V tem primeru lahko enega od njiju izrazimo z drugim, npr.: $\vec{b} = n\vec{a}$.
  Če vzporedna vektorja prenesemo v skupno začetno točko, vidimo, da ležita na isti premici. Zato pravimo tudi, da sta **kolinearna**.
  Za dva vektorja torej velja:
  $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta odvisna $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta vzporedna $\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta kolinearna.

- Trije vekorji so linearno odvisni, če in samo če so **koplanarni**. Vektorji so koplanarni, če ležijo v isti ravnini, kadar jih narišemo iz skupne začetne točke.

- Poljubni štirje vektorji (v običajnem prostoru) so vedno linearno odvisni.

Baza je skupina vektorjev, ki ima naslednji dve lastnosti:
- bazni vektorji so med sabo neodvisni,
- vsak drug vektor (v okviru dane množice) lahko izrazimo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev.

Število baznih vektorjev imenujemo **dimenzija** ali **razsežnost**.

- Baza premice je poljuben neničelen vektor. Dimenzija premice je enaka 1. (Premica je enorazsežna.)

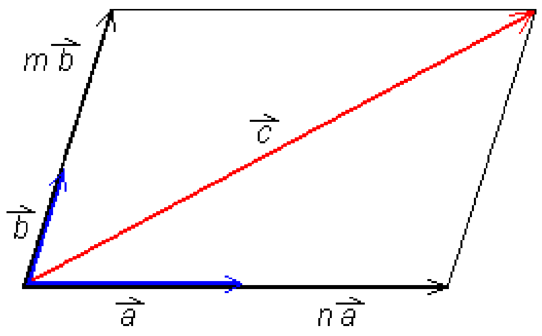
- Bazo ravnine sestavljata poljubna neničelna nevzporedna vektorja. Dimenzija ravnine je torej enaka 2. (Ravnina je dvorazsežna).

- Bazo prostora sestavljajo trije neničelni vektorji, ki ne ležijo v isti ravnini. Dimenzija prostora je enaka 3. (Prostor je trirazsežen.)

Bazo uporabljamo zato, da z baznimi vektorji izrazimo ostale vektorje (v okviru dane množice).
Zgled:
Če v ravnini izberemo bazo sestavljeno iz dveh neničelnih nevzporednih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, potem lahko poljuben vektor $\vec{c}$ iz te ravnine zapišemo kot linearno kombinacijo baznih vektorjev: $\vec{c} = n\vec{a} + m\vec{b}$

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

Temu zapisu pravimo tudi **razvoj** vektorja $\vec{c}$ po bazi $\vec{a}$, $\vec{b}$. Števili n in m, ki nastopata v razvoju, imenujemo **komponenti**.



$$\vec{c} = n\vec{a} + m\vec{b}$$

Koordinate vektorjev
Kadar vektorje rišemo v koordinatnem sistemu (v ravnini ali v prostoru), lahko za začetno točko vektorja izberemo izhodišče koordinatnega sistema. Takemu vektorju pravimo krajevni vektor:
Krajevni vektor točke *A* je vektor, ki se začne v izhodišču koordinatnega sistema in konča v točki A. Označimo ga $\vec{r}_A$ in definiramo:
Krajevni vektor točke *A* ima iste koordinate kot točka *A*.

Bazo ravnine sestavljata poljubna neničelna nevzporedna vektorja. Če je v ravnini podan pravokotni koordinatni sistem, ponavadi izberemo za bazo ravnine vektorja $\vec{i}$ in $\vec{j}$, ki sta določena z naslednjimi lastnostmi:
- imata dolžino enako 1 (sta enotska),
- sta pravokotna,
- vektor $\vec{i}$ ima smer osi x, vektor $\vec{j}$ pa ima smer osi y.

To bazo imenujemo **standardna ortonormirana baza ravnine**.

V prostoru moramo dodati še tretji bazni vektor $\vec{k}$, ki je tudi enotski in ima smer osi z. Baza $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ je **standardna ortonormirana baza prostora**.

Koordinate poljubnega vektorja $\vec{a}$ so enake kot komponente pri razvoju tega vektorja po standardni ortonormirani bazi.

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Računanje s koordinatami vektorjev
Vektorje podane s koordinatami lahko seštevamo in množimo s števili:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
$$n\vec{a} = (na_1, na_2, na_3)$$

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

Dolžino vektorja $\vec{a}$ izračunamo po pravilu:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Koordinate vektorja s poljubno začetno točko *A* in končno točko *B* dobimo po pravilu:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

Če je točka *S* razpolovišče daljice *AB*, lahko krajevni vektor točke *S* izračunamo po pravilu:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B)$$

Skalarni produkt

Skalarni produkt je računska operacija, ki ima za podatka vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, za rezultat pa realno število (skalar), ki ga izračunamo po pravilu:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi$$

Pri tem φ označuje kot, ki ga oklepata vektorja, če ju narišemo iz skupne začetne točke.

Če sta vektorja podana s koordinatami, lahko skalarni produkt izračunamo po pravilu:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Lastnosti skalarnega produkta

Za poljubne vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ in za poljubno realno število *n* velja:

$$\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$$
$$\vec{a}\,(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}$$
$$(n\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a}\,(n\vec{b}) = n(\vec{a}\,\vec{b})$$
$$\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Skalarni produkt lahko izrazimo tudi s projekcijo enega vektorja na drugega:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\ \mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\ \mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi = \text{projekcija vektorja } \vec{b} \text{ na vektor } \vec{a}$$

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi = \text{projekcija vektorja } \vec{a} \text{ na vektor } \vec{b}$$

V mehaniki predstavlja skalarni produkt na primer mehansko delo, ki je produkt sile in razdalje.

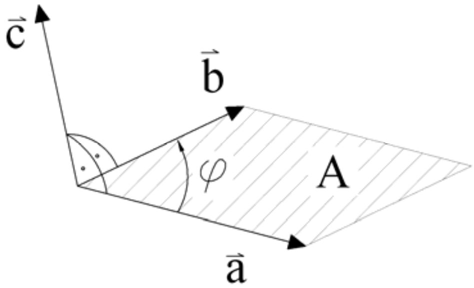
Vektorski produkt

- Rezultat vektorskega produkta je vektor

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}\,,\ |\vec{c}| = A$$

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

- Absolutna vrednost vektorskega produkta je dolžina vektorja $\vec{c}$ in hkrati predstavlja ploščino paralelograma A, ki ga tvorita vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$
- Vektor $\vec{c}$ je provokoten na oba vektorja



Lastnosti vektorskega produkta:

1/ Če velja $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, sta vektorja kolinearna

2/ $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ antikomutativnost

3/ Skalarni faktor lahko izpostavimo

$(m\vec{a})\times\vec{b}=m(\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$

4/ Distributivnost glede na vektorsko vsoto

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

Absolutna vrednost vektorskega produkta je še:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\cdot b\cdot \sin\varphi$$

Vektorski produkt se v mehaniki uporablja pri izračunu momenta sile ali kotne hitrosti.
Vektorski produkt izračunamo s pomočjo naslednje trivrstne determinante:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$, če sta vektorja $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ in $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2)\cdot\vec{i}+(a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3)\cdot\vec{j}+(a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1)\cdot\vec{k}$$

Mešani produkt

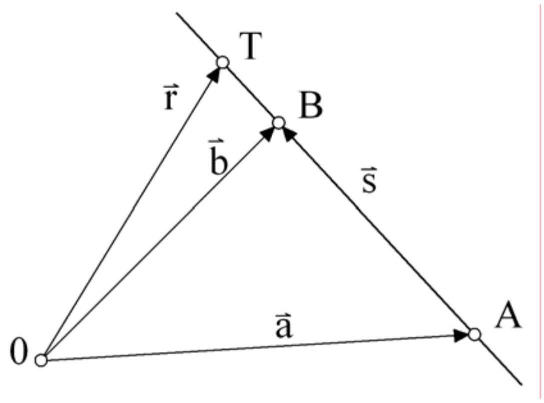
$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$, če so vektorji $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ in $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

Rezultat mešanega produkta treh vektorjev je skalar in številčno predstavlja prostornino telesa, ki ga omejujejo vsi trije prostorski vektorji.

Enačba premice v prostoru

Imejmo točki A in B s koordinatami A(a_1, a_2, a_3) in B(b_1, b_2, b_3) , ki pa so hkrati tudi komponente krajevnih vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Če poteka skozi ti dve točki premica, moramo izračunati koordinato poljubne točke, oziroma komponente poljubnega prejevnega vektorja.



$\vec{s}$ -smerni vektor

$$\overline{AB} = \vec{s} = \vec{b} - \vec{a}$$
$$\vec{r} = \overline{OA} + m \cdot \overline{AB}$$
$$\vec{r} = \vec{a} + m \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} + m \cdot \begin{Bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{Bmatrix}$$

Dobimo tri enačbe, v smeri vsake koordinatne smeri po eno. Če iz vsake posebej izračunamo konstanto m in vse tri izraze izenačimo, dobimo enačbo premice v prostoru:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3}$$

Primeri:

1/ V neki točki je nosilec obremenjen s silami $\mathbf{F_1}$=(-2, 2, 3) kN, $\mathbf{F_2}$=(4, 2, -4) kN in $\mathbf{F_3}$=(-1, 2, 1) kN. Kolikšna je rezultanta po smeri in velikosti ?

2/ Iz točke A(5,2,3) v točko B(-6,1,5) deluje sila $\mathbf{F_1}$**,** iz točke A v točko C(1,2,-1) pa sila $\mathbf{F_2}$. Izračunajte ploščino trikotnika, ki ga oklepata sili. Razdalje so v metrih.

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I

3/ Sila velikosti 35 N deluje iz koordinatnega izhodišča. Kot med osjo x in silo je $\alpha=\pi/3$ radianov, kot med z osjo in silo pa 140º. Določite vektor sile in njen enotski vektor.

4/ Izračunajte volumen piramide, ki jo oklepajo vektorji **a**=(6,2,1), **b**=(-3,3,5) in **c**=(5,-1,2) [cm].

5/ Sila **F**=(2,-2,5) kN deluje iz točke T_0(2,1,3) [m]. Določite moment te sile glede na točko T_1(3,1,-1) [m].

6/ Preverite, če sile $\mathbf{F_1}$=(1, 2,2) kN, $\mathbf{F_2}$=(-4, -2, 4) kN in $\mathbf{F_3}$=(-1, 2, -1) kN ležijo v isti ravnini.

7/ Zapišite enačbo premice, ki poteka skozi točko P(-2,1,3) [m] in je vzporedna s premico $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{2}$.

8/ Določite enačbo premice skozi točki A(0,2,1) in B(-1,4,6).

9/ Premica poteka skozi točki A(1,2,3) in B(-1,5,7). Zapišite vzporednico, ki poteka skozi točko P(3,4,5).

10/ Izračunajte kot med silama $\mathbf{F_1}$=(150, 210,290) N, ki ima prijemališče v izhodišču koordinatnega sistema in F_2= 550 N in leži na premici, ki poteka skozi točki A(3,3, -3) [dm] ter B(1,-6,5) [dm]. Izračunajte tudi njuno rezultanto.

Vir: [1] http://www2.arnes.si/~mpavle1/mp/index.html
[2] Avtorski prispevek
[3] Kočevar, Šterk: Mehanika I